

1. Per ognuno dei casi seguenti si dica se la serie converge assolutamente (barrando  $\boxed{\text{AC}}$ ), converge semplicemente ma non assolutamente (barrando  $\boxed{\text{C}}$ ) oppure non converge (barrando  $\boxed{\text{NC}}$ ) (2 punti ciascuno)

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n - n^2}{1 + n^3} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 - e^{-n}}{e^n - n}$$

2. Si dica per quali valori del parametro  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$  converge l'integrale improprio:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha(1-x+x^2)} dx$$

3. Si scriva la soluzione del seguente problema di Cauchy (6p):

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = e^x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

4. Si calcoli (se esiste) il seguente integrale improprio (8 punti).

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + e^{-x})^2} dx$$

5. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - 1} - \frac{2}{x + 3} \quad -1 < x < 1.$$

- (a) dato  $y_0 \in \mathbb{R}$  si scriva la soluzione dell'equazione con la condizione  $y(0) = y_0$  (2 p.);  
(b) si calcolino, al variare di  $y_0$ , i limiti delle soluzioni per  $x \rightarrow -3^+$  e per  $x \rightarrow 3^-$  (4p);  
(c) si tracci il grafico delle soluzioni per i valori "più significativi" di  $y_0$  (4p.);  
(d) si dica per quali valori di  $y_0$  l'equazione  $y(x) = 1$  ha due radici (2p.).

TEMPO DISPONIBILE: UN'ORA E MEZZA. NON È CONSENTITO USCIRE.  
NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.

DEVE ESSERE CONSEGNATO SOLO IL FOGLIO RISPOSTE (il testo si può tenere)  
PER GLI ESERCIZI 1,2,3 E 4 CONTA SOLO LA RISPOSTA. L'ESERCIZIO 5 VA SVOLTO  
E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

AFFINCHÈ IL COMPITINO SIA VALIDO È NECESSARIO CHE (contemporaneamente):

- (a) IL VOTO NEI PUNTI 1-4 SIA MAGGIORE O EGUALE A 8  
(b) IL VOTO COMPLESSIVO SIA MAGGIORE O EGUALE A 15.