Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quarantatreesima lezione, 25 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

① (a) $\sum_n (-1)^n \dfrac{n-n^2}{1+n^3}$

$a_n = \dfrac{n-n^2}{1+n^3}(-1)^n =$

$|a_n| = \dfrac{-n+n^2}{1+n^3} \simeq \dfrac{1}{n}$ dunque

$\sum_n |a_n| = +\infty$ (NON CONV. ASS.)

$a_n = \dfrac{n-n^2}{1+n^3}(-1)^n = -(-1)^n \dfrac{n^2-n}{1+n^3}$

Posso applicare Leibniz a $\sum (-1)^n \dfrac{n^2-n}{1+n^3}$

La serie è a segni alterni. Se dimostro che

$|a_n| = \dfrac{n^2-n}{1+n^3}$ è decrescente (almeno per n grande) $\Rightarrow \sum_n a_n$ CONVERGE

Per verificarlo potrei considerare $\dfrac{x^2-x}{1+x^3} = f(x)$ e vedere che

$f'(x) < 0$ per x grande . . .

$\boxed{C}$

(b) $a_n = (-1)^n \dfrac{(2-e^{-n})}{e^n - n}$ $|a_n| = \dfrac{2-e^{-n}}{e^n-n} \simeq \dfrac{2}{e^n}$

(se n grande in modo che $e^n \geq n$)

$2\sum_n \dfrac{1}{e^n}$ converge

GEOMETRICA DI RAGIONE $1/e < 1$

$\boxed{A\ C}$

② $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)+x}{\underbrace{x^\alpha (x^2-x+1)}_{f(x)}}\,dx$

x^2-x+1 NON HA RADICI

SINGOLARE IN $x=0$ e A $+\infty$

IN ZERO $\quad f(x) \simeq \dfrac{2x}{x^\alpha} = \dfrac{2}{x^{\alpha-1}}$. Per essere integrabile ci vuole $\alpha-1<1 \iff \boxed{\alpha<2}$

A $+\infty$ $\quad f(x) \simeq \dfrac{x}{x^\alpha x^2} = \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ Per essere integrabile ci vuole $\alpha+1>1 \iff \boxed{\alpha>0}$

$$\boxed{0<\alpha<2}$$

③ $\begin{cases} y''-5y'+4y = e^x \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$

$P(z) = z^2-5z+4$

RADICI $x=1,\ x=4$

$y_0(x) = \lambda e^{4x} + \mu e^x$

$P(1)=0$

sol. dell'omogenea, cerco la sol. part. del tipo

$\bar{y}(x) = \boxed{\gamma x e^x}$, $\quad \bar{y}'(x) = \gamma(e^x + xe^x)$, $\quad \bar{y}''(x) = \gamma(2e^x + xe^x)$

IMPONGO L'EQ. $\Rightarrow$ $\bar{y}''-5\bar{y}'+4\bar{y} = \gamma\left[2e^x + \cancel{xe^x} - 5e^x \cancel{-5xe^x} + \cancel{4xe^x}\right] =$

$-3\gamma\, e^{x}$. DUNQUE $\gamma = \frac{-1}{3}$ e $y(x) = \lambda e^{4x} + \mu e^{x} - \frac{x e^{x}}{3}$ $(\lambda+\mu=0)$

$\Rightarrow y'(x) = 4\lambda e^{4x} + \mu e^{x} - \frac{e^{x}}{3} - \frac{x e^{x}}{3}$ $\left(4\lambda + \mu = 1 + \frac{1}{3} \right)$ $\lambda = \frac{4}{9}$ $\mu = -\frac{4}{9}$

DA CUI $y(x) = \dfrac{4e^{4x} - 4e^{x} - 3x e^{x}}{9}$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{x}}{(e^{x}+e^{-x})^2}\, dx$ $y = e^{x}$ $dy = e^{x} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dy}{(y+1/y)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\, dy = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} y \frac{2y}{(1+y^2)^2}\, dy =$$

(per parti) $\displaystyle\frac{1}{2}\left[y \frac{(-1)}{1+y^2} \right]_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}}$

arctg

(5)

$y' = \dfrac{2x}{x^2-1}\, y - \dfrac{2}{x+3}$ $-1 < x < 1$

$x_0 = 0$ $y_0 = y(0)$

$$\int_0^x \frac{2t}{t^2-1}\,dt = \ln\left(|t^2-1|\right) \Rightarrow$$

$$y(x) = (1-x^2)\left\{ y(0) + \int_0^x \frac{2}{(t^2-1)(t+3)}\,dt \right\}$$

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+3} = \frac{A(t^2+4t+3) + B(t^2+2t-3) + c(t^2-1)}{\text{den.}}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 4A + 2B = 0 \\ 3A - 3B - C = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -A-B \\ 2A + B = 0 \\ 4A - 2B = 2 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = 1/4 & B = -1/2 \\ C = 1/4 & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\frac{2}{t+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{t+3} \qquad \left(\frac{1}{4}\,\frac{\cancel{t^2}+\cancel{4t}+3-2(\cancel{t^2}+\cancel{2t}-3)+\cancel{t^2}-1}{} = 8 \right)$$

sembra ok.

$$\frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t+3}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}\right|\right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{4}\ln\frac{(1-x)(3+x)}{(x+1)^2} + \text{cost}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (1-x^2)\left\{ c + \frac{1}{4}\ln\frac{(1-x)(3+x)}{(x+1)^2} \right\} \quad \leftarrow$$

dove $C + \frac{1}{4}\ln(3) = y_0 \iff \boxed{C = y_0 - \frac{1}{4}\ln(3)}$

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = 0^+\left(C + \frac{1}{4}\ln\infty\right) = 0^+$$

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = 0^+\left(C + \frac{1}{4}\ln 0\right) = 0^-$$

VEDIAMO LA MONOTONIA: Se $F(x,y) = \frac{2xy}{x^2-1} - \frac{2}{x+3}$

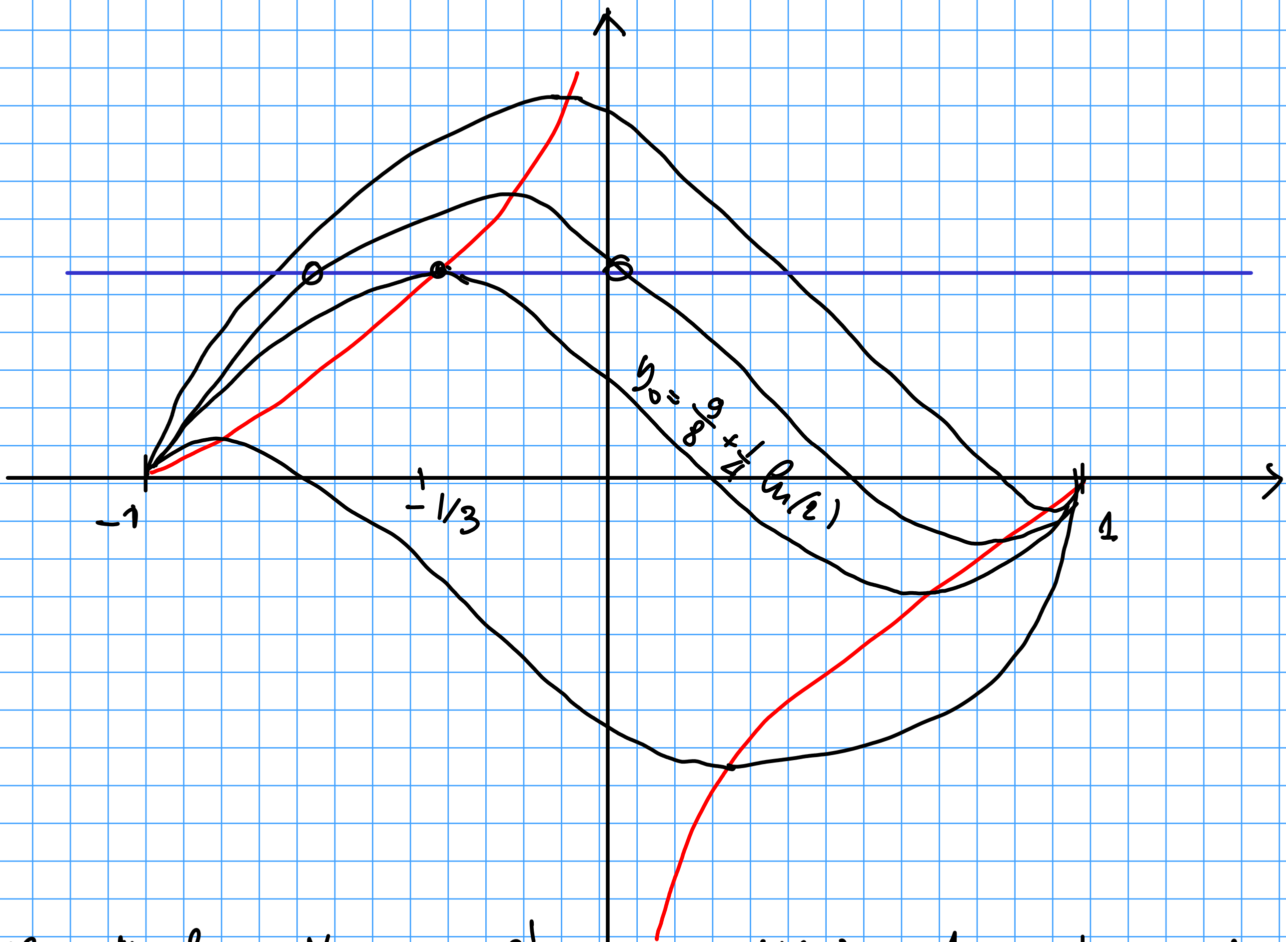
$$F(x,y) > 0 \iff \frac{\cancel{2}xy}{x^2-1} > \frac{\cancel{2}}{x+3} \iff xy < \frac{x^2-1}{x+3} \iff \begin{cases} y < g(x) & x>0 \\ y > g(x) & x<0 \end{cases}$$

dove $g(x) = \frac{x^2-1}{x(x+3)}$. STUDIO LA $g(x)$: DOMINIO $= \{x \neq 0,\ x \neq -3\}$

$g(x) = 0$ se $x = \pm 1$ $\quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

$$g'(x) = \frac{2x \cdot x(x+3) - (x^2-1)(2x+3)}{x^2(x+3)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 6x^2 - (\cancel{2x^3} + 3x^2 - 2x - 3)}{x^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{3x^2+2x+3}{x^2(x+3)^2} \leftarrow \Delta<0 \Rightarrow g'(x)>0 \quad \forall x \ (\neq 0$$



~ tutte simili

(d) per quali y_0 l'eq. $y(x) = 1$ ha due sol.

CERCO L'INTERSEZIONE $y = g(x)$ con $y = 1$ $\Leftrightarrow$

trovo $x = -\frac{1}{3}$. Cerco la soluzione che verifica $y\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$

$$1 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left\{ C + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{(4/3)(8/3)}{(4/3)^2}\right)\right. \iff$$

$$\frac{9}{8} = C + \frac{1}{4} \ln \frac{\frac{32}{9}}{\frac{16}{9}} \iff C = \frac{9}{8} - \frac{1}{4} \ln(2)$$

$$\iff y_0 = \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \ln(3) - \frac{1}{4} \ln(2)$$

$$\boxed{y_0 = \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

DUE SOL. SE $y_0 > \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \ln(2)$