Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quarantaduesima lezione, 19 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Dal compito 27/5/2008

CHI VIENE AL COMPITINO DEVE REGISTRARSI
→ VEDI AVVISO SUL SITO

Discutere il carattere di queste serie:

(A) $\sum_n \left(\sqrt[n^2]{2} - 1\right)$ (B) $\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

(C) $\sum_n \frac{(-1)^n n^2}{n^4+1}$ (D) $\sum_n (-1)^n \arctan(n\pi)$

(DIRE SE la serie CONV. ASS / CONV. MA NON ASS / NON CONV.
$\boxed{AC}$ $\boxed{C}$ $\boxed{NC}$

(A) $(a_n \geq 0)$; $a_n = \sqrt[n^2]{2} - 1 = e^{\frac{1}{n^2}\ln 2} - 1 =$

$1 + \frac{1}{n^2}\ln(2) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{n^2}\ln(2) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

DUNQUE $a_n \simeq \frac{\ln(2)}{n^2}$. Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ converge - converge ass. dato che $a_n \geq 0$

(B) $a_n = \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ cambio segno. $\boxed{AC}$

Se passo ai moduli trovo $|a_n| = \frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\sum_n |a_n| = +\infty$ (NON CONV. ASS.)

Però posso usare Leibniz dato che $|a_n|$ decresce $\Rightarrow$

$\sum a_n$ CONVERGE $\boxed{C}$

(C) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{1+n^4}$ cambia segno

$|a_n| = \frac{n^2}{1+n^4} \simeq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_n |a_n|$ converge $\boxed{AC}$

(non occorre usare Leibniz – potrei farlo ma troverei solo la conv. che è meno rispetto alla convergenza ass.)

(D) $a_n = (-1) \arctan(n\pi)$ $|a_n| \to \frac{\pi}{2} \neq 0$

NON PUÒ CONVERGERE perché $a_n \cancel{\to} 0$ $\boxed{NC}$

Altro esempio dello stesso tipo (compito del 7/1/2009)

(A) $\underbrace{\sum_n (-1)^n \frac{\ln(n^2+1)}{n^2}}_{a_n}$ $\qquad |a_n| = \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} \sim 2\frac{\ln n}{n^2}$

$\Rightarrow \sum |a_n| < +\infty$ perché

so che $\sum \frac{1}{\ln^\beta n^\alpha}$ converge quando $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1 \quad \beta > 1 \end{cases}$ $\quad \boxed{\alpha = 2} \quad \beta = -1$

$\boxed{AC}$

(B) $\sum (-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$ $\qquad \boxed{NC}$ dato che $\frac{n}{\ln(n)} \to +\infty$

$\boxed{C}$ $\sum (-1)^n \frac{n!\, 2^n}{n^n}$ $\qquad |a_n| = \frac{n!\, 2^n}{n^n}$

USIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)!\ 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\ 2^n}{n^n}} = \frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}\ \cancel{2^{n+1}}^{\,2}\ n^n}{\cancel{n!}\ \cancel{2^n}\ (n+1)^{\cancel{n+1}}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{2}{e} < 1$$ DUNQUE $\boxed{AC}$

$\boxed{D}$ $$\sum_n (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

$$|a_n| = \frac{\ln(n)}{n} = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$ DIVERGE

$\alpha = 1$

$\beta = -1$ (MI SERVIREBBE $\beta > 1$)

NON CONV. ASS.

VEDIAMO SE CONVERGE USANDO LEIBNIZ

DEVO VERIFICARE che $n \mapsto \frac{\ln(n)}{n}$ è decrescente

PASSO A $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, faccio la derivata:

$$\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$ negativo se $x > e$

quindi $|a_n|$ decresce se $n \geq 3$ $\boxed{C}$

Dal compito 7/1/2009

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$$

MODO 1

$$\frac{1}{(4+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{4+x^2} + \frac{d}{dx}\,\frac{Cx+D}{4+x^2} =$$

$$\frac{Ax+B}{4+x^2} + \frac{C(4+x^2)-(Cx+D)2x}{(4+x^2)^2} = \frac{(Ax+B)(4+x^2)+4C+Cx^2-2Cx^2-2Dx}{(4+x^2)^2} =$$

$$\frac{Ax^3+Bx^2+4Ax+4B-Cx^2-2Dx+4C}{(4+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B - C = 0 \\ 4A - 2D = 0 \\ 4B + 4C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0 \quad D = 0 \\ B = C \;(= 1/8) \\ B = 1/8 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx + \underbrace{\frac{1}{8}\left[\frac{x}{4+x^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} =$$

$$\frac{1}{32}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(x/2)^2}\,dx = \frac{1}{\cancel{32}\,2}\left[2\,\mathrm{arctg}\,(x/2)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{16}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}$$

MODO 2

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(4+x^2)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{4+x^2-x^2}{(4+x^2)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2} - \frac{1}{8}\int\frac{x(2x)}{(4+x^2)^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{16}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x/2)^2} - \underbrace{\frac{1}{8}\left[x\,\frac{(-1)}{4+x^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$$

HO USATO : $\frac{d}{dx}\frac{1}{4+x^2} = \frac{-2x}{(4+x^2)^2}$ e ho integrato per parti

$$= \frac{1}{32}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x/2)^2} = \frac{2}{32}\left[\arctan(x/2)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{32}$$

Dal compito del 26/5/2004

$$\int_0^1 e^{5x}\sin(3x)\,dx \qquad \text{(integro per parti 2 volte)}$$

$$= \left[\frac{e^{5x}}{5}\sin(3x)\right]_0^1 - \frac{3}{5}\int_0^1 e^{5x}\cos(3x)\,dx =$$

$$\frac{e^5}{5}\sin(3) - \frac{3}{5}\left[\frac{e^{5x}}{5}\cos(3x)\right]_0^1 - \frac{9}{25}\int_0^1 e^{5x}(-\sin(3x))\,dx =$$

$$\frac{e^5}{5}\sin(3) - \frac{3}{25}\left(e^5\cos(3) - 1\right) - \frac{9}{25}\int_0^1 e^{5x}\sin(3x)\,dx \implies$$

$$\int_0^1 e^{5x}\sin(3x)\,dx = \frac{1}{\left(1+\frac{9}{25}\right)}\left(\frac{5e^5\sin(3) - 3e^5\cos(3) + 3}{25}\right.$$

$$\frac{25}{34}\cdot\frac{1}{25}\left(e^5 3\cos(3) - e^5\sin(3) - 3\right) = \frac{1}{34}\left(\qquad\qquad\right)$$

METODO ALTERNATIVO (usando i complessi)

Noto: $e^{5x}\sin(3x) = \operatorname{Im} e^{(5+3i)x}$. Facciamo l'integrale:

$$\int_0^1 e^{(5+3i)x}\,dx = \left[\frac{e^{(5+3i)x}}{5+3i}\right]_0^1 =$$

$$\frac{e^{5+3i} - 1}{5+3i} = \frac{(5-3i)\left(e^{5+3i}-1\right)}{5^2+3^2} =$$

$$\frac{1}{34}(5-3i)\left(e^5\left(\cos(3) + i\sin(3)\right) - 1\right) \leftarrow$$ FACCIO LA PARTE IMMAGINARIA

$$\frac{1}{34}\left(5e^5\sin(3) - 3e^5\cos(3) + 3\right) \quad \text{RISULTATO}$$

IN GENERALE PER FARE $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx \,/\, \int e^{ax}\cos(bx)$

si può calcolare $\int e^{(a+ib)x}\,dx \left(= \frac{1}{a+ib} e^{a+ibx} + cost\right)$ e prendere

la parte immaginaria / la parte reale del risultato

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\,dx$$

(Nota che l'integrale sicuramente converge, dato che l'integrando $\simeq e^{-2x}$)

$$e^{2x} = y \qquad 2x = \ln(y) \qquad dx = \frac{1}{2}\frac{1}{y}\,dy$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\,\frac{1}{2}\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}.$$

(converge: all'∞ l'integrand $\simeq \frac{1}{y^{5/2}}$)

$$t = \sqrt{\frac{y-1}{y+1}} \iff t^2 = \frac{y-1}{y+1} \iff yt^2 + t^2 = y - 1 \iff$$

$$y = \frac{-(1+t^2)}{t^2-1} \qquad dy = \frac{-2t(t^2-1)+(t^2+1)2t}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{4t\,dt}{(t^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cancel{(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2}\,\frac{t\quad 4t}{\cancel{(t^2-1)^2}}\,dt =$$

$$2\int_0^1 \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$ (lo faccio con il "trucco" di integrazione per parti)

$$\parallel$$

$$\int_0^1 t\,\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \left[t\left(-\frac{1}{t^2+1}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$-\frac{1}{2} + \arctan(1) = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$ (>0 dato che $\pi > 2$)

Risolvere i due problemi

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y' = \dfrac{4x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(trovando anche l'intervallo "massimale" per cui sono definite le soluzioni.

USANDO LA TECNICA RISOLUTIVA PER LE EQ. VAR SEP

$$\int_{y_0}^{y(x)} s\, ds = \int_{x_0}^{x} 4t\, dt$$

$$\frac{y^2(x)}{2} - \frac{y_0^2}{2} = 2x^2 - 2x_0^2 \qquad x_0 = 0$$

$$y^2(x) = y_0^2 + 4x^2 \qquad (\text{per } x \geq 0)$$

CASO $y_0 = 1$ $\qquad y^2(x) = 1 + 4x^2$

DATO CHE $y(0) = 1$ DEVO PRENDERE LA DET. >0 DELLA RADICE

$$\Rightarrow \quad y(x) = +\sqrt{1+4x^2} \qquad \text{esiste } \forall x$$

CASO $y_0 = -1$ $\qquad y^2(x) = 1 + 4x^2$

DATO CHE $y(0) = -1$ DEVO PRENDERE − RADICE

$$y(x) = -\sqrt{1+4x^2}$$ esiste $\forall x$

CALCOLI RIGUARDO L'ES. SOPRA

$y\, y' = 4x$

$y(x)\, y'(x) = 4x$ INTEGRO TRA x_0 e x

$$\int_{x_0}^{x} y(t)\, y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} 4t\, dt$$

sostituisco $y(t) = s$ $y'(t)\, dt = ds$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} s\, ds = \int_{x_0}^{x} 4t\, dt$$

Dal compito 7/11/2009

$$y' = \frac{2}{x+2}\, y - \frac{x+2}{1-x^2} \qquad -1 < x < 1 \qquad y(0) = y_0$$

$$A(x) = \int_0^x \frac{2}{t+2}\,dt = \Big[2\ln|t+2|\Big]_0^x = \ln\frac{(x+2)^2}{4} \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{(x+2)^2}{4}\left\{ y_0 - \int_0^x \frac{t+2}{1-t^2}\,\frac{4}{(t+2)^2}\,dt \right\} =$$

$$(x+2)^2 \left\{ \frac{y_0}{4} - \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)(t+2)} \right\} = (\ast)$$

$$\frac{1}{(1-t^2)(t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+2}$$

$$\frac{A(t+1)(t+2) + B(t-1)(t+2) + C(t^2-1)}{(t-1)(t+1)(t+2)} =$$

$$\frac{(A+B+C)t^2 + (3A+B)t + (2A-2B-C)}{(t-1)(t+1)(t+2)} = \frac{-1}{(t^2-1)(t+2)}$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ 3A+B = 0 \\ 2A-2B-C = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3A-B = -1 & (\mathrm{I}+\mathrm{III}) \\ 3A+B = 0 \\ A+B+C = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{6} \qquad B = \frac{1}{2} \qquad C = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\int \sim dt = \int \left(-\frac{1}{6} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{t+2} \right) dt =$$

$$\frac{1}{6} \ln \frac{|t+1|^3}{|t-1|\,|t+2|^2} + cost \qquad \Rightarrow$$

$$y(x) = (x+2)^2 \left\{ \frac{y_0}{4} - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2} \right| + \frac{1}{6} \ln \frac{1}{4} \right\} =$$

$$(x+2)^2 \left\{ \underbrace{\frac{y_0}{4} - \frac{1}{3} \ln(2)}_{C} - \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^3}{(1-x)(x+2)^2} \right\}$$

LIMITI

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^+} y(x) = +\infty \\ \\ \lim_{x \to 1^-} y(x) = -\infty \end{array}\right\} \forall\, y_0$$

MONOTONIA

$$F(x,y) = \frac{2}{(x+2)} y - \frac{x+2}{1-x^2} \qquad -1 < x < 1 \Downarrow x+2 > 0$$

$$F(x,y) > 0 \iff y > \frac{1}{2} \frac{(x+2)^2}{1-x^2} =: g(x)$$

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty \qquad g(-1/2) = \frac{1}{2} \frac{(3/2)^2}{1-1/4} = \frac{1}{2} \frac{9/4}{3/4} = \frac{3}{2}$$

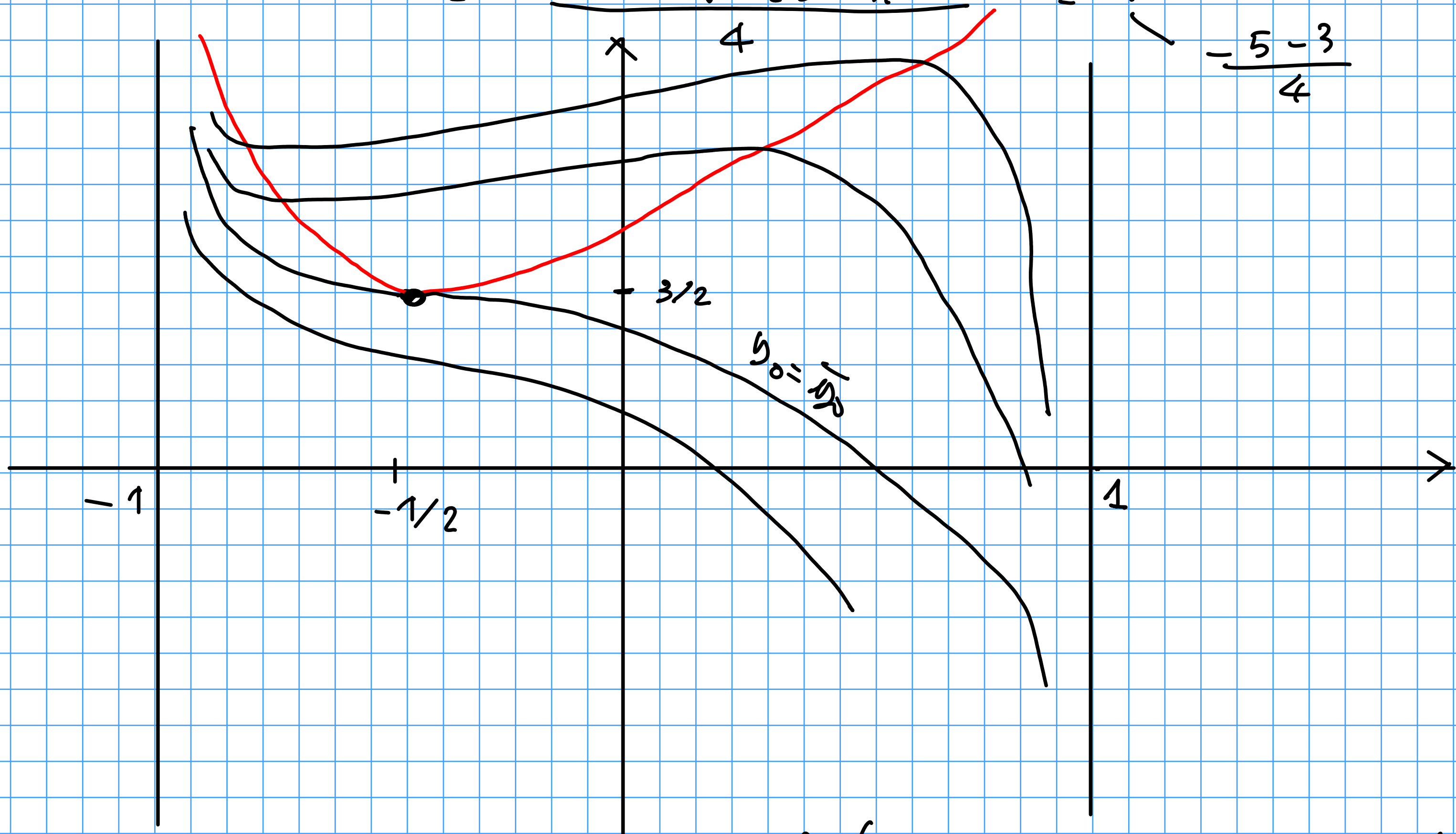
$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2(x+2)(1-x^2) - (x+2)^2(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$(x^2+4x+4)\,2x$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2x - \cancel{2x^3} + 4 - 4x^2 + \cancel{2x^3} + 8x^2 + 8x}{(1-x^2)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{4x^2 + 10x + 4}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+5x+2}{(1-x^2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \iff x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-5+3}{4} = -\dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{-5-3}{4} \quad -2 \end{cases}$$



$\bar{y}_0$ è tale che $\frac{3}{2} = \left(-\frac{1}{2}+2\right)^2 \left(\frac{y_0}{4} - \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1/2)^3}{(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}+2)^2}\right)\right)$ ...

(in modo che la soluzione individuata da $\bar{y}_0$ passi per $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$)

(d) per quali valori di y_0 la sol. è strett. decrescente

R: $y_0 \leq \bar{y}_0$

RISOLUZIONE "PER SERIE" DI EQ. DIFF. LINEARI

Mettiamo di avere l'eq. diff.

$$x\, y'' + y = 0$$

È LINEARE, OMOGENEA del II^a ORDINE, NON È IN FORMA NORMALE su $\mathbb{R}$ – posso metterla in forma normale su $\{x \neq 0\}$

NON HO FORMULE PER RISOLVERLA (ALMENO TRA LE COSE VISTE)

IDEA: CERCO LE SOLUZIONI COME "SERIE DI POTENZE"

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

METTO $x_0 = 0$ (VADO A VEDERE LE SOL. VICINO AL PUNTO "CATTIVO")

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

RAGIONIAMO SUPPONENDO CHE TUTTI I PASSAGGI CHE SERVONO SIANO LECITI E VEDIAMO COME DEVE ESSERE FATTA $y(x)$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) m \, a_{m+1} x^m$$

$m = n - 1$

$n = m+1$ (e m lo chiamo di nuovo n)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n \, a_{n+1} x^n$$

DUNQUE

$$x y'' + y = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) n \, a_{n+1} + a_n \right] x^n + a_0 = 0$$

$\Leftarrow$ (vale anche $\Rightarrow$)

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ (n+1) n \, a_{n+1} + a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

DUNQUE $a_0 = 0$ e

$$a_{m+1} = \frac{-a_m}{m(m+1)} \quad \forall m \geq 1$$ (posso dividere per $m(m+1) \geq 1$)

$\Uparrow$

CONDIZIONE RICORSIVA MI PERMETTE DI TROVARE $a_m \; \forall m$
PURCHÉ IO ASSEGNI a_1

Se per esempio prendo $a_1 = 1$ ho

$$\circledast \begin{cases} \bar{a}_{m+1} = \dfrac{-\bar{a}_m}{m(m+1)} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$ e a_m sono individuati tutti

È chiaro che se $a_1 = \alpha \Rightarrow a_m = \alpha \bar{a}_m$

Quindi posso (provo a) definire

$$\bar{y}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{a}_m x^n$$

A PATTO CHE IO POSSA VERIFICARE CHE LA SERIE CONVERGE. PER QUESTO DOVREI CALCOLARE

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|\bar{a}_n|} = \lim_{m\to} \frac{|\bar{a}_{m+1}|}{|a_m|} \underset{(\text{uso la rel. } \circledast)}{=} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 0$$

$\Rightarrow \quad R = +\infty \quad$ cioè $\bar{y}(x)$ è definita $\forall x$.

PER LE PROPRIETÀ DELLE SERIE DI POTENZE $\bar{y}$ è derivabile quante volte voglio e le sue derivate sono la serie delle derivate. DUNQUE tutti i passaggi fatti SONO LECITI e $\bar{y}(x)$ verifica l'equazione.

TUTTE le altre soluzioni (che si riescono a trovare così) sono $y(x) = \alpha\, \bar{y}(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$.

NOTIAMO CHE $\quad \bar{y}(0) = a_0 = 0 \qquad \bar{y}'(0) = a_1 = 1$

(se queste che ho trovato sono tutte le sol. - SI PUÒ DIMOSTRARE CHE È così) $\Rightarrow$

le sol. definite in $x=0$ DEVONO AVERE $y(0)=0$ - NON POSSO ASSEGNARE LA POSIZIONE.
Invece posso assegnare $y'(0)$ ad arbitrio

LE SOLUZIONI CHE SI PROLUNGANO IN $x=0$ FORMANO UNO SPAZIO DI DIMENSIONE 1

QUESTO DIPENDE DAL FATTO CHE L'EQ. NON È IN FORMA NORMALE.

MI ASPETTO CHE, se $x_0 \sim 0$ e prendo la sol. con

$y(x_0) = y_0 \neq 0$, queste $y(x)$ divergono quando $x_0 \to 0$

OLTRE A QUESTA ANALISI, LA FORMULA SOPRA È COMUNQUE INTERESSANTE PER CALCOLARE LA SOLUZIONE

TORNIAMO SU

$$(*) \begin{cases} a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{n(n+1)} \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

$a_1 = 1$, $\quad a_2 = -\dfrac{a_1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $\quad a_3 = \dfrac{-a_2}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2^2 \cdot 3}$

$a_4 = \dfrac{-a_3}{3 \cdot 4} = \dfrac{-1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}$, $\quad a_5 = \dfrac{-a_4}{4 \cdot 5} = \dfrac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}$

SEMBRA : $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\,((n-1)!)^2}}$

Per verificare se la formula è vera usiamo l'induzione!

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1\ (0!)^2} = \frac{1}{1} = 1 \quad \underline{\underline{\text{SI}}}$$

Se la formula è vera per n $\Rightarrow$

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{n\,(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \, \frac{(-1)^{n+1}}{n\,((n-1)!)^2} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)\,(n!)^2} \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

DUNQUE $\displaystyle a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\,((n-1)!)^2}$ che tende a zero <u>MOLTO</u> rapidamente. Questo implica un'ottima stima se tronco la serie a un $K < +\infty$.

QUESTO APPROCCIO (Mediante le serie di potenze) HA MOLTE APPLICAZIONI — SI POSSONO AFFRONTARE EQ. LINEARI MOLTO PIÙ GENERALI DI QUELLE A COEFF COSTANTI CHE ABBIAMO.

Se l'eq. non fosse omogenea:

$$x y'' + y = b(x)$$

Posso fare lo stesso se posso scrivere $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Nella relazione (*) compariranno anche i b_n (termini noti)

$\simeq$ dovrebbe venire (DA VERIFICARE)

$$a_0 = b_0$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{n+1} = -\dfrac{\bar{a}_n}{n(n+1)} + b_n \\ \bar{a}_1 = 1 \end{cases}$$

IN GENERALE POSSO USARE QUESTO METODO QUANDO I COEFFICIENTI E IL TERMINE NOTO DELL'EQ. SONO SVILUPPABILI IN SERIE DI POTENZE