Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quarantunesima lezione, 18 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

$$y' = 2xy + 1 - x^2 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad y_0 = y(0)$$

$$a(x) = 2x \qquad b(x) = 1 - x^2$$

$$A(x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{x^2}\left\{ y_0 + \int_0^x (1-t^2)e^{-t^2}dt \right\} = e^{x^2}\{y_0 + F(x)\}$$

non so calcolare analiticamente questo integrale

PROVIAMO A CONTINUARE LO STUDIO ANCHE SENZA L'ESPRESSIONE "ESPLICITA" di $F(x)$. NOTIAMO SUBITO CHE

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} (1-t^2)\,e^{-t^2} \quad \text{(INT. IMPROPRIO) FINITO}}$$

Infatti $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-t^2)\,e^{-t^2}}{e^{-t}} = \lim_{x\to+\infty} (1-t^2)\,e^{t-t^2} = 0$

(l'esponenziale "vince" - per farlo posso usare Hôpital, scrivendo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1-t^2}{e^{t^2-t}} = \text{due derivate} = 0$$

INOLTRE $F(-x) = -F(x)$ (sto integrando una funzione pari su un intervallo che parte da zero):

$$F(-x) = \int_0^{-x} (1-t^2)\, e^{-t^2}\, dt = -\int_{-x}^{0} (1-t^2)\, e^{-t^2} \underset{(y=-t)}{=} -\int_x^0 (1-y^2)\, e^{-y^2} (-dy) = -\int_0^x (1-y^2)\, e^{-y^2}\, dy$$

DUNQUE $F(x)$ È DISPARI $\Rightarrow$

$$y(x) = y_0\, e^{x^2} + \underbrace{e^{x^2} F(x)}_{\text{dispari}} \quad \left(= e^{x^2} \left(y_0 + F(x) \right) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} (1-t^2)\, dt$$

LIMITI:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > -F(\infty) \\ +\infty & y_0 = -F(\infty) \\ -\infty & \text{se } y < -F(\infty) \end{cases}$$

NEL CASO $y_0 = -F(\infty)$ uso Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y_0 + F(x)}{e^{-x^2}} \overset{\lim_{x\to+\infty}}{=} \frac{F'(x)}{-2x\, e^{-x^2}} \overset{\lim_{x\to+\infty}}{=} \frac{(1-x^2)\, \cancel{e^{-x^2}}}{-2x\, \cancel{e^{-x^2}}} = +\infty$$

HO USATO IL TEOREMA FOND. CALC. INT.:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (1-t^2)\, e^{-t^2}\, dt = (1-x^2)\, e^{-x^2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > F(\infty) \\ -\infty & \text{se } y_0 = F(\infty) \\ -\infty & \text{se } y_0 < F(\infty) \end{cases}$$

che segno ?! È >0, VEDI DISCUSSIONE SOTTO

Nel caso $y_0 = F(+\infty)$ uso di nuovo Hôpital.

MONOTONIA (uso solo l'equazione) Posto $F(x,y) = 2xy - (x^2-1)$

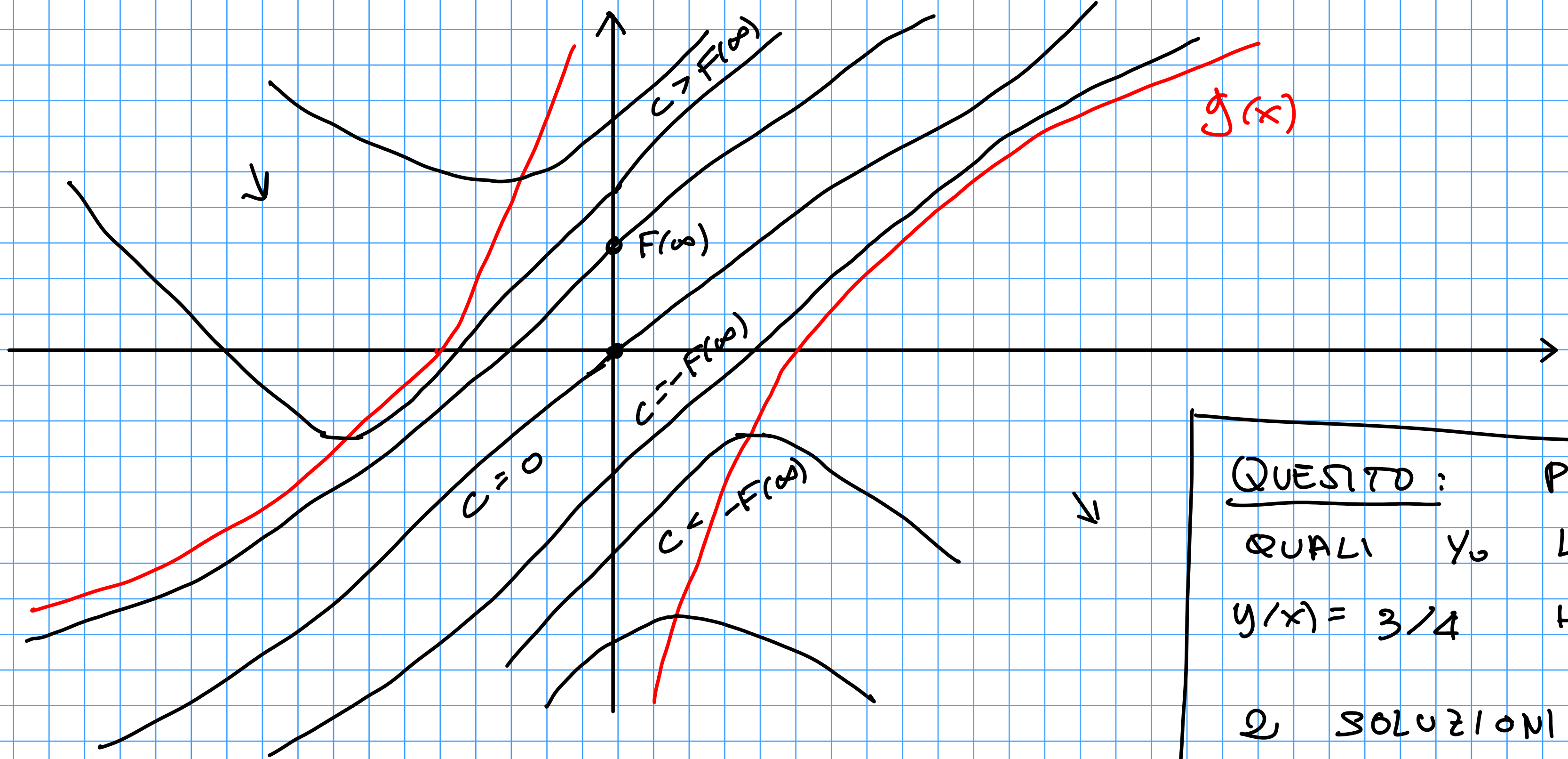
si ha

$$F(x,y) > 0 \iff \begin{cases} y > \frac{x^2-1}{2x} =: g(x) & x>0 \\ \forall y & x=0 \\ y < \frac{x^2-1}{2x} & x<0 \end{cases}$$

CONVIENE ESAMINARE IL GRAFICO DI $g(x) = \frac{x^2-1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ $\qquad g'(x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) > 0$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$ $\qquad$ (CRESCE SEMPRE)

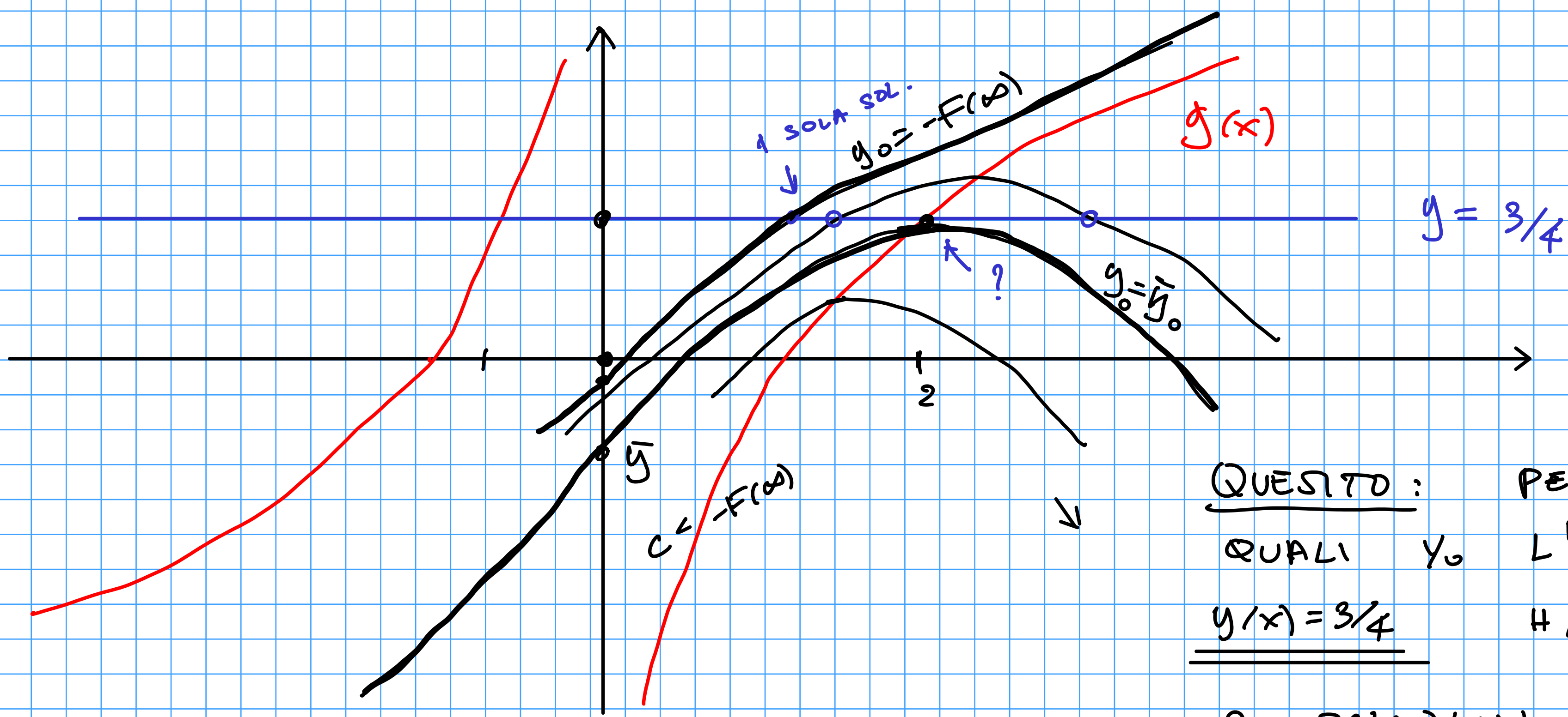


QUESITO: PER QUALI y_0 L'EQUAZ. $y(x) = 3/4$ HA 2 SOLUZIONI > 0

PROBLEMA: che segno ha $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-t^2)e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt > 0$

DEVO CONFRONTARE $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}$

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t\left(2t\, e^{-t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\underbrace{\left[t\left(-e^{-t^2}\right)\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$



QUESITO: PER QUALI y_0 L'EQUAZ. $y(x) = 3/4$ HA 2 SOLUZIONI > 0

CERCHIAMO L'INTERSEZIONE TRA $y = \frac{3}{4}$ e $y = g(x)$

$$\frac{3}{4} = \frac{x^2-1}{2x} \iff x = \pm 2$$

Cerchiamo la sol $\bar y$ tale che $y(2) = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} = e^4\left(y_0 + F(2)\right) \iff y_0 = \boxed{\frac{3}{4e^4} - F(2) =: \bar y_0}$$

$\bar{y}$ DEVE ESSERE < 0 (LO SI VEDE DAI GRAFICI : $\bar{y}(x) < y^0(x)$ se $y^0(x)$ è quello che parte da $(0,0)$)

IN DEFINITIVA LE CURVE $y(x)$ che tagliano DUE VOLTE LA RETTA $y = \frac{3}{4}$ sono tutte e sole quelle tra $\bar{y}(x)$ e $y^0(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{y}_0 < y_0 < -F(\infty)$$

$$y' = \frac{2xy}{y-1} \qquad \left(y(x_0) = y_0 \right)$$

DEVO ESCLUDERE $y_0 = 1$ – L'EQ. PERDE DI SENSO SE PASSO PER $y = 1$

<u>SOL. COSTANTI</u> $\quad y(x) = 0 \quad \forall x$

Se parto da $y_0 \neq 0$, $y_0 \neq 1$ ho la formula :

$$y' \frac{y-1}{y} = 2x$$

INTEGRO (e metto $s = y(x)$)

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{s-1}{s}\, ds = x^2 - x_0^2$$

se ora

$$\int_{y_0}^{y} \frac{s-1}{s}\, ds = \int_{y_0}^{y} \left(1-\frac{1}{s}\right) ds = y - y_0 - \ln\left|\frac{y}{y_0}\right|$$

$$= \underbrace{y - \ln|y|}_{F(y)} - y_0 + \ln|y_0|$$

DUNQUE

$$F(y(x)) = F(y_0) + x^2 - x_0^2$$

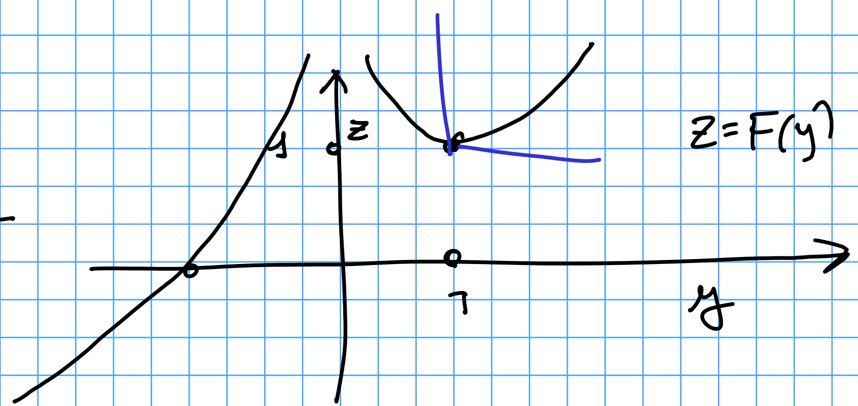
Vediamo come è fatta $F(y)$:

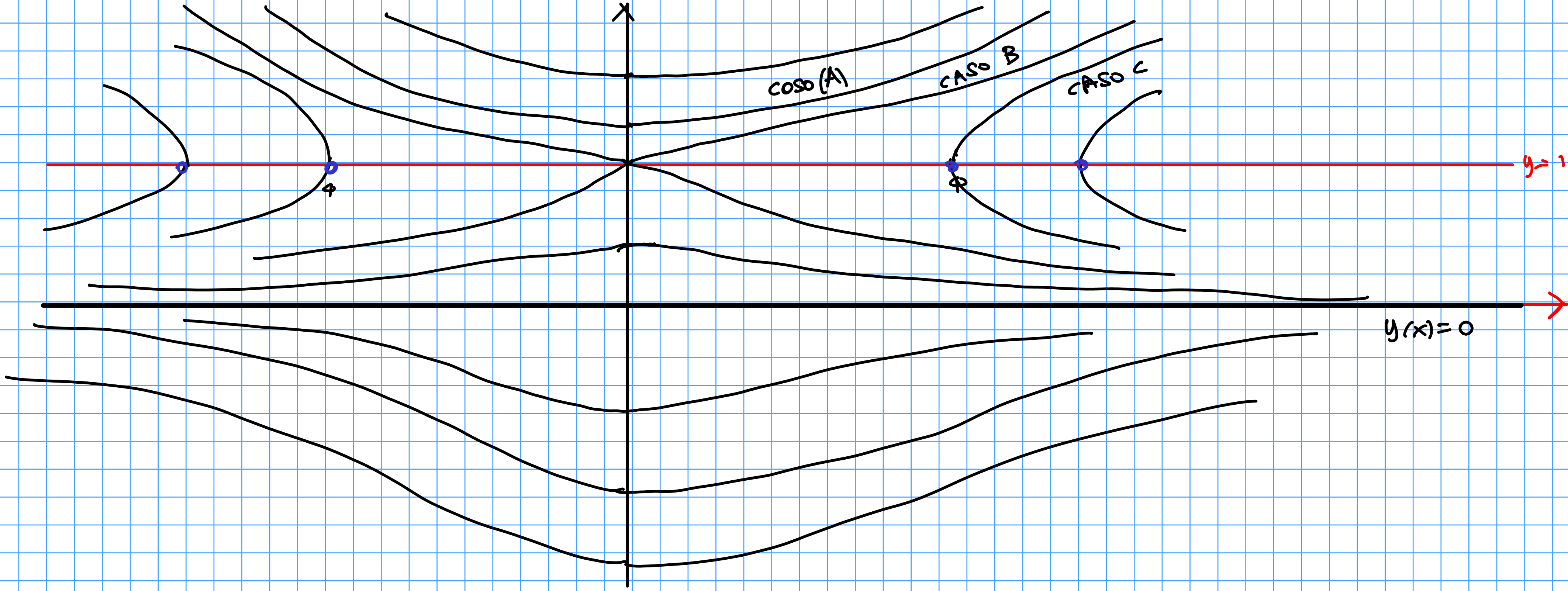
DOMINIO: $y \neq 0$ $\quad \lim_{y\to 0^{+/-}} F(y) = +\infty$ $\quad \lim_{y\to {+\infty \atop -\infty}} F(y) = +\infty / -\infty$

$F'(y) = 1 - \frac{1}{y}$ si annulla per $y=1$,

$F'(y) > 0$ se $y < 0$ o $y > 1$

$F'(y) < 0$ se $0 < y < 1$





La sol. $y(x)$ è data da $y(x) = F^{-1}\left(F(y_0) - x_0^2 + x^2\right)$

dove F^{-1} va determinata a seconda di y_0

Supponiamo $y_0 > 1$. $F^{-1} : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$, dunque

$y(x)$ esiste se $F(y_0) - x_0^2 + x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq 1 + x_0^2 - F(y_0)$

TRE CASI

(A) $1 - x_0^2 - F(y_0) < 0 \Rightarrow y(x)$ definita $\forall x$

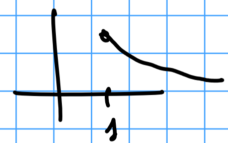
(B) $1 - x_0^2 - F(y_0) = 0 \Rightarrow y(x)$ " " $\forall x$

ma in $x = 0$ $y(x) = 1 \Rightarrow$ e' eq. ma ha senso

Se facessi $\lim_{x \to 0^+} g'(x)$ troverei un numero > 0 (BISOGNA FARE I CONTI)

(c) $-c = 1 - x_0^2 - F(y_0) > 0$: ci sono due radici di $x^2 = c$

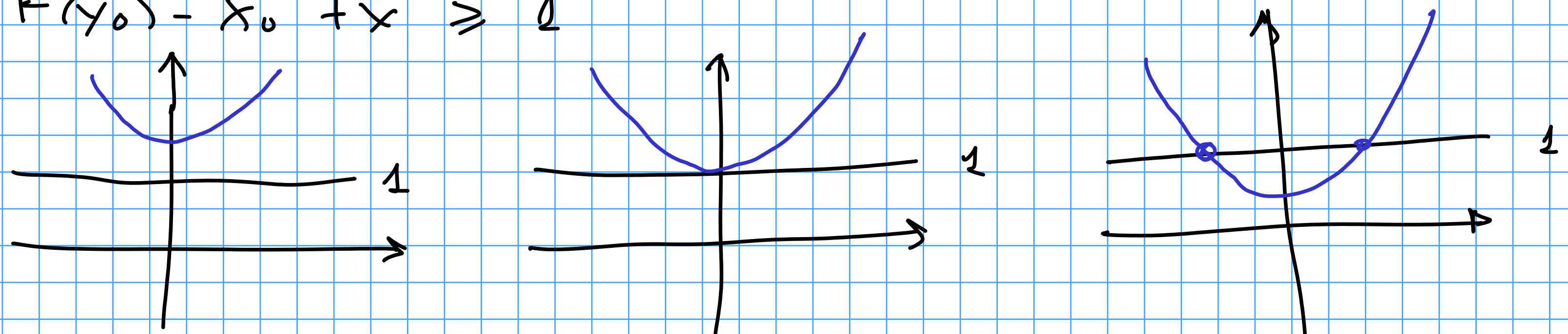
e quindi DUE RAMI - vedi disegno

$0 < y_0 < 1$ Devo invertire F su $]0, 1[$. In questo caso $F^{-1} : [1, +\infty[\to]0, 1]$ decrescente 

Mettendoci dentro $F(y_0) - x_0^2 + x^2$ trovo le cose del disegno

BISOGNA SEMPRE ANDARE A VEDERE QUANDO

$$F(y_0) - x_0^2 + x^2 \geq 1$$

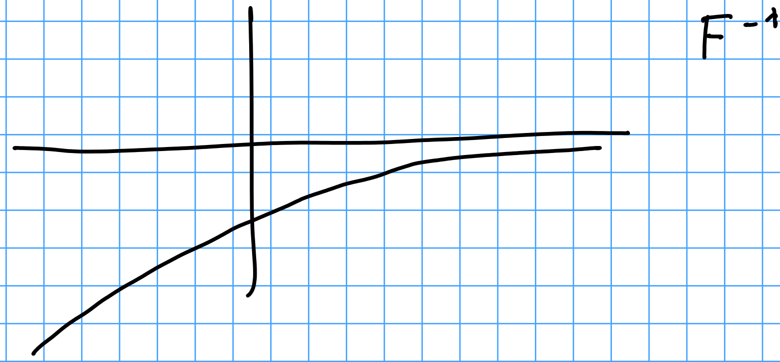


CASO A CASO B CASO C

$y_0 < 0$. Stavolta devo invertire F su $]-\infty, 0[$

$F^{-1}: \mathbb{R} \to]-\infty, 0[$, crescente

$(\to 0$ se $x \to +\infty)$



$\Rightarrow \quad y(x) = F^{-1}\left(F(y_0) - x_0^2 + x^2\right)$

è DEFINITA $\forall x$

cresce per $x>0$ / decresce per $x<0$ / ha derivata $=0$ in $x=0$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x}}\,dx = \int \frac{x^2}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\,dx =$$

$$\int x \sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx = ⊛$$

$$\sqrt{x(x-1)} = x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$t = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$t^2 = \frac{x}{x-1} \iff t^2 x - t^2 = x \iff x(t^2-1) = t^2$$

$$x = \frac{t^2}{t^2-1} \qquad dx = \frac{2t(t^2-1) - t^2 \cdot 2t}{(t^2-1)^2}\,dt = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$\circledast = \int \frac{t^2}{(t^2-1)} \cdot t \cdot \frac{(-2t)}{(t^2-1)^2}\, dt = \int \frac{-2t^4}{(t^2-1)^3}\, dt$$

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{d}{dt}\, \frac{Ct^3+Dt^2+Et+F}{(t^2-1)^2} =$$

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{(3Ct^2+2Dt+E)(t^2-1)^2 - (Ct^3+Dt^2+Et+F)\,2\,(t^2-1)\,2t}{(t^2-1)^4} =$$

$$\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{(3Ct^2+2Dt+E)(t^2-1) - (Ct^3+Dt^2+Et+F)4t}{(t^2-1)^3} =$$

$$\frac{A(t-1)^2(t+1)^3 + B(t-1)^3(t+1)^2 \quad (3Ct^2+2Dt+E)(t^2-1) - (Ct^3+Dt^2+Et+F)4t}{(t^2-1)^3}$$

. . . . lasciamo perdere

dal compito 8/1/2003

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+4\sin(x)}}\, dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+4\sin(x)}}\,dx \qquad \sin(x)=y \qquad \cos(x)\,dx = dy$$

$$\int_0^1 \frac{2y}{\sqrt{1+4y}}\,dy \qquad \sqrt{1+4y}=t \qquad 1+4y=t^2$$

$$y=\frac{t^2-1}{4} \qquad dy=\frac{t}{2}\,dt$$

$$\int_1^{\sqrt5} \frac{t^2-1}{2\cancel{t}}\,\frac{\cancel{t}}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt5} (t^2-1)\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_0^{\sqrt5} = \frac{1}{4}\left(\frac{5\sqrt5}{3}-\sqrt5\right)$$

DISCUTERE L'ESISTENZA DELL' INT. IMPROPRIO

AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^\alpha e^{x^2}(1+x^4)}\,dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1-e^{-x^2}\cos(x)}{x^\alpha(1+x^4)}}_{f(x)}\,dx$$

VA SPEZZATO SU

$[0,1]$ e su $[1,+\infty[$

$\int_0^1 f(x)\,dx$. Vicino a zero $f(x) \simeq \frac{1}{x^\alpha}\left(1-e^{-x^2}\cos(x)\right) =: g(x)$

$\left[\text{perché } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{1+x^4} \to 1\right]$ INOLTRE

Dato che $e^{-x^2}\cos(x) = \left(1-x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) =$

$1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$, si ha:

$$g(x) \simeq \frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^\alpha} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\alpha-2}} =: h(x)$$

SO CHE $h(x)$ È INT. SU $]0,1]$ $\iff$ $\alpha-2<1 \iff \boxed{\alpha<3}$

Questi sono gli α per cui $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$. Sviluppo $f(x) \simeq \frac{1}{x^{\alpha+4}}$

DATO CHE $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+4}}$ CONVERGE PER $\alpha+4>1$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE $\iff$ $\boxed{\alpha>-3}$

IN DEFINITIVA $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV. $\iff$ $\boxed{-3 < \alpha < 3}$

Sempre dal compito del 8/1/2003

$$y' = \frac{x}{1+x^2}\,y - 7x \qquad y(0) = y_0$$

$$A(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(y_0 - 7\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right) =$$

$$\sqrt{1+x^2}\left\{ y_0 - \frac{7}{2}\Big[2\sqrt{1+t^2}\Big]_0^x \right\} =$$

$$\sqrt{1+x^2}\left\{ y_0 + 7 - 7\sqrt{1+x^2} \right\} = c\sqrt{1+x^2} - 7(1+x^2)$$

dove $c = y_0 + 7$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$$

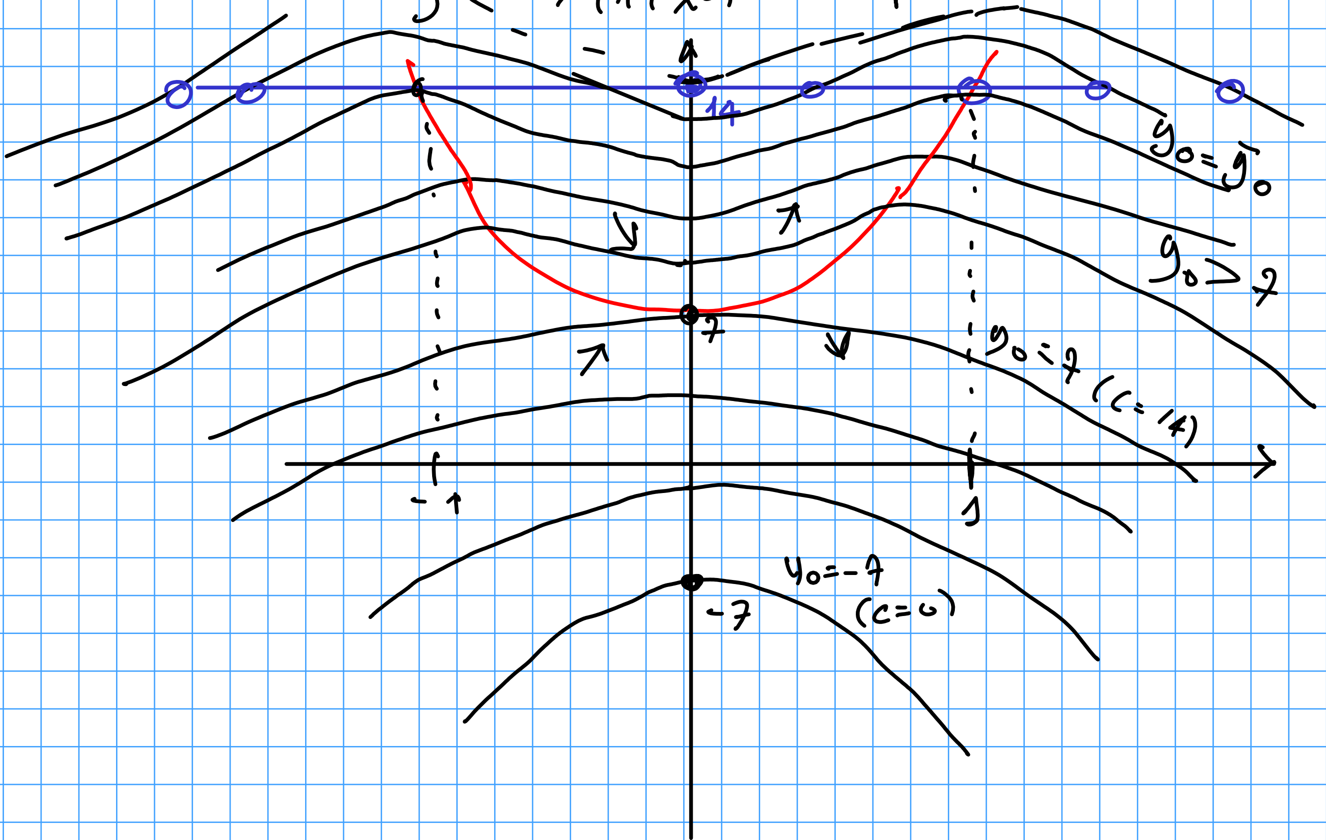
· Per la monotonia considero $F(x,y) := \frac{x}{1+x^2}\, y - 7x > 0$

$\Longleftrightarrow$

$y > 7(1+x^2)$ per $x>0$ chiamo $g(x) = 7(1+x^2)$

MAI per $x=0$

$y < 7(1+x^2)$ per $x<0$



(B) per quali y_0 la $y(x)$ è decrescente su $[0,+\infty[$

RISP: $y_0 \le 7$

(C) per quali y_0 l'equazione $y(x) = 14$ ha almeno una sol.

Cerco le intersezioni tra $y = g(x)$ e $y = 14 \Longleftrightarrow 7(1+x^2) = 14 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Cerco la curva $\bar{y}(x)$ tale che $\bar{y}(1) = 14 \Longleftrightarrow$

$$14 = \sqrt{1+1^2}\left(y_0 + 7 - 7\sqrt{1+1^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{14}{\sqrt{2}} = y_0 + 7(1-\sqrt{2}) \Longleftrightarrow$$

$$y_0 = 7\sqrt{2} - 7 + 7\sqrt{2} = 7(2\sqrt{2}-1) =: \bar{y}_0$$

LE CURVE CHE MI INTERESSANO SONO QUELLE CON $\underline{\underline{y_0 \geq \bar{y}_0}}$

se volessi contarle ovvero:

0 sol. $\qquad y_0 < \bar{y}_0$

1 sol. > 0 / 1 sol < 0 se $y_0 = \bar{y}_0$

2 sol > 0 / 2 sol < 0 se $\bar{y}_0 < y_0 < 14$

1 sol > 0, + $x = 0$, 1 sol < 0 se $y_0 = 14$

1 sol > 0 / 1 sol < 0 se $y_0 > 14$

---

dal compito 1/9/2009

Per quali α converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^{\alpha} + n^{1-5\alpha}}{1 + n^4}}_{a_n}$

A cosa è asintotico a_n? $(n \to \infty)$

CONTA $\beta = \max(\alpha, 1 - 5\alpha) \Rightarrow a_n \simeq \dfrac{n^{\beta}}{n^4} = \dfrac{1}{n^{4-\beta}}$

Per avere la convergenza $\iff$ $4-\beta > 1 \iff \beta < 3$

CIOÈ $\max(\alpha, 1-3\alpha) < 3 \iff \alpha < 3$ E $1-3\alpha < 3$

$\iff \alpha < 3$ E $\alpha > -\frac{2}{5}$ (risposta (d))

$$y'' + 9y = e^x \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=1$$

$P(z) = z^2 + 9$ radici $\pm 3i$

sol. omogenea $y_0(x) = \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)$

sol. particolare: $\bar{y}(x) = c\, e^x \Rightarrow \bar{y}'(x) = c\, e^x,\ \bar{y}'' = c\, e^x$

$\bar{y}'' + 9\bar{y} = 10 c\, e^x$ deve essere $c = \frac{1}{10} \Rightarrow$

La soluzione generale è $y(x) = \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x) + \frac{e^x}{10}$

$\Rightarrow y'(x) = 3\mu \cos(3x) - 3\lambda \sin(3x) + \frac{e^x}{10}$ DA CUI

$$\begin{cases} \lambda + \frac{1}{10} = 0 \\ 3\mu + \frac{1}{10} = 1 \end{cases} \qquad \lambda = -\frac{1}{10} \qquad \mu = +\frac{3}{10} \qquad \Rightarrow y(x) = \frac{e^x - \cos(3x) + 3\sin(3x)}{10}$$

Dal testo: (DIRE COSA È VERO)

(a) $\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0$ $\boxed{\text{NO}}$

CONTROLLARE

(b) $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$ $\boxed{\text{SI}}$

(c) $y'(\pi) = \frac{e^{\pi} - 9}{10}$ $\boxed{\text{NO}}$

(d) $y(\pi) = \frac{e^{\pi} - 1}{10}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\left(\frac{e^{\pi} + 1}{10} \right)$