Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quarantesima lezione, 12 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

CASO $b(x) = p(x)\, e^{z_0 x}$ con $P(z_0) = 0$

Sia m = molteplicità di z_0 $\left(P'(z_0) = \dots = P^{(m-1)}(z_0) = 0,\ P^{(m)}(z_0) \neq 0 \right)$

Allora si trova una soluzione $\bar{y}$ dell'eq. del tipo

$$\bar{y}(x) = q(x)\, e^{z_0 x}$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado $\leq$ grado$(p) + m$.

ESEMPIO

$$y'' - y = x e^{x}$$

$P(x) = z^2 - 1$, RADICI $z_{1,2} = \pm 1$.

$p(x) = x$ (grado 1) $z_0 = 1$ RADICE DI P $m = 1$

DUNQUE CERCO $\bar{y}(x) = q(x)\, e^{x}$ con $q(x)$ di grado $1+1=2$

$\Leftrightarrow$ $q(x) = (ax^2 + bx + c)\, e^{x}$ PERÒ posso prendere $c = 0$

dato che $c e^{x}$ è sol. dell'omogenea. RIMANGONO DA TROVARE a e b.

$$\bar{y}(x) = (ax^2 + bx)\, e^x$$

$$\bar{y}'(x) = (2ax + b)\, e^x + (ax^2 + bx)\, e^x = (ax^2 + (2a+b)x + b)\, e^x$$

$$\bar{y}''(x) = (2ax + 2a + b)\, e^x + (ax^2 + (2a+b)x + b)\, e^x = (ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b)\, e^x$$

$$\bar{y}''(x) - \bar{y}(x) = (\cancel{ax^2} + (4a+\cancel{b})x + 2a + 2b - \cancel{ax^2} - \cancel{b}x)\, e^x = (4ax + 2a + 2b)\, e^x$$

DUNQUE $4a = 1$, $2a + 2b = 0 \iff a = \frac{1}{4}$ $b = -\frac{1}{4}$ cioè:

$$\bar{y}(x) = \frac{x^2 - x}{4}\, e^x$$

Se volessi risolvere $\begin{cases} y'' - y = x e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{x^2 - x}{4}\, e^x$$ da cui

$$y'(x) = \lambda e^x - \mu e^{-x} + \frac{x^2 + x - 1}{4}\, e^x$$

da cui $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = \frac{5}{8} \\ \mu = -\frac{5}{8} \end{cases}$ $\Rightarrow y(x) = \frac{5}{8}\left(e^x - e^{-x}\right) + \frac{x^2 - x}{4}\, e^x$

$$= \frac{5}{4} \sinh(x) + \frac{x^2 - x}{4} e^x$$

ESEMPIO

$$y'' + 2y' + y = x e^{-x}$$

$P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ SOLO LA RADICE -1 DOPPIA ($m=2$)

$p(x) = x$ di grado 1 $z_0 = -1$ (= radice di P). Devo cercare la sol. particolare come $q(x) e^{-x}$ con q di grado 3

cioè $\bar{y}(x) = (a x^3 + b x^2 + c x + d) e^{-x}$ PERÒ posso prendere $c = d = 0$

dato che le sol. dell'omogenea sono $y_0(x) = (\lambda + \mu x) e^{-x}$

DUNQUE

$$\bar{y}(x) = (a x^3 + b x^2) e^{-x}$$

$$\bar{y}'(x) = (3a x^2 + 2 b x) e^{-x} - (a x^3 + b x^2) e^{-x}$$

$$= (-a x^3 + (3a - b) x^2 + 2 b x) e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x) = (-3a x^2 + \underbrace{2(3a - b)}_{6a - 2b} x + 2b) e^{-x} - (-a x^3 + (3a - b) x^2 + 2 b x) e^{-x} =$$

$$\left(ax^3+(-6a+b)x^2+(6a-4b)x+2b\right)e^{-x}$$

$$\bar{y}''(x)+2\bar{y}'(x)+\bar{y}(x)=e^{-x}\Big(\cancel{ax^3}+\cancel{(-6a+b)x^2}+(6a-\cancel{4b})x+2b$$

$$\cancel{-2ax^3}+\cancel{(6a-2b)x^2}+4\cancel{b}x+\cancel{ax^3}+\cancel{bx^2}\Big)=$$

$$e^{-x}\left[6ax+2b\right]$$

DUNQUE $\quad a=\frac{1}{6} \quad b=0 \quad$ cioè $\quad \bar{y}=\boxed{\frac{x^3}{6}e^{-x}}$

VERIFICA (?) $\quad \bar{y}=\frac{x^3}{6}e^{-x} \quad \bar{y}'=\frac{x^2}{2}e^{-x}-\frac{x^3}{6}e^{-x}=\frac{3x^2-x^3}{6}e^{-x}$

$$\bar{y}''=\frac{6x-3x^2}{6}e^{-x}-\frac{3x^2-x^3}{6}e^{-x}=\frac{x^3-6x^2+6x}{6}e^{-x}$$

$$\bar{y}''+2\bar{y}'+y=\frac{\cancel{x^3}-\cancel{6x^2}+6x+\cancel{6x^2}-\cancel{2x^3}+\cancel{x^3}}{6}e^{-x}=xe^{-x}$$

(E) $\quad y''+4y=x\sin(2x)$

$P(z)=z^2+4 \qquad$ RADICI $\quad \pm 2i$

Soluzioni dell'omogenea $\quad \lambda e^{2ix}+\mu e^{-2ix}$ oppure $\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)$

Se pongo a (E1) $y'' + 4y = x e^{2ix}$ $\qquad z_0 = 2i$ RADICE DI P

Per trovare una sol. particolare posso

(I) cercare $\bar{y}(x) = (ax^2 + bx)\cos(2x) + (cx^2 + dx)\sin(2x)$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

OPPURE

(II) cercare $\bar{y}_1(x) = (ax^2 + bx) e^{2ix}$ $\qquad a, b \in \mathbb{C}$

e prendere $\bar{y}(x) = \operatorname{Im}(\bar{y}_1(x))$

NON HO MESSO IL TERMINE NOTO DATO CHE PRODURREBBE UNA SOL. DELL' OMOGENEA

Stavolta usiamo il metodo I.

$$\bar{y}(x) = \underline{(ax^2 + bx)\cos(2x) + (cx^2 + dx)\sin(2x)}$$

$$\bar{y}'(x) = (2ax + b)\cos(2x) - 2(ax^2 + bx)\sin(2x) +$$

$$(2cx + d)\sin(2x) + 2(cx^2 + dx)\cos(2x) =$$

$$\boxed{(2cx^2 + (2d + 2a)x + b)\cos(2x) + (-2ax^2 + (2c - 2b)x + d)\sin(2x)}$$

$$\bar{y}''(x) = (\underline{4cx} + \underline{(2d + 2a)})\cos(2x) +$$

$$-2\left(2cx^2+\underline{(2d+2a)}\,x+b\right)\sin(2x)+$$

$$\left(\underline{-4ax}+(2c-2b)\right)\sin(2x)+$$

$$2\left(-2ax^2+\underline{(2c-2b)}\,x+d\right)\cos(2x)=$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(-4ax^2+(8c-4b)x+4d+2a\right)\cos(2x)+\\&\left(-4cx^2+(-4d-8a)x+(-4b+2c)\right)\sin(2x)\end{aligned}}$$

$$y''+4y=\left(\cancel{-4ax^2}+(8c-\cancel{4b})x+4d+2a+\cancel{4ax^2}+\cancel{4bx}\right)\cos(2x)+$$

$$\left(\cancel{-4cx^2}+(\cancel{-4d}-8a)x+(-4b+2c)+\cancel{4cx^2}+\cancel{4dx}\right)\sin(2x)=$$

$$(8cx+4d+2a)\cos(2x)+(-8ax-4b+2c)\sin(2x)$$

$$\begin{cases}8c=0\\4d+2a=0\\-8a=1\\-4b+2c=0\end{cases}\qquad c=0,\ a=-\frac{1}{8},\ b=0,\ d=\frac{1}{16}$$

$$\bar{y}(x)=-\frac{x^2}{8}\cos(2x)+\frac{x}{16}\sin(2x)$$

ESEMPIO Consideriamo il sistema di primo ordine con due equazioni:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases}$$

y_1 = popolazione di predatori

y_2 = popolazione di prede

(RISORSE INFINITE PER y_2)

SE LO VOGLIO METTERE IN FORMA VETTORIALE SCRIVO

$$\underline{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'equazione si scrive

$$\underline{Y}' = A\underline{Y}$$

Se pongo $v(x) = y_1(x)$ trovo

$$v'(x) = y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) = \underbrace{v(x) + y_2(x)}$$

$$v''(x) = v'(x) + y_2' = v' - 4y_1 + y_2 =$$

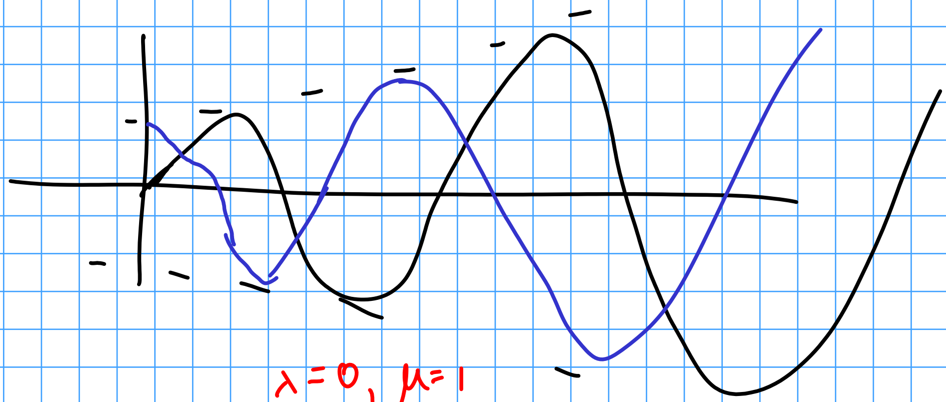
$v' - 4v + y_2$

$$\Rightarrow \quad v''(x) - v'(x) = v' - 4v + y_2 - v - y_2 = v' - 4v - v$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{v'' - 2v' + 5v = 0} \qquad \text{OMOGENEA}$$

$$P(z) = z^2 - 2z + 5 \qquad \text{RADICI } 1 \pm 2i \quad \Rightarrow$$

$$v(x) = e^x\left(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\right) \qquad = \quad y_1(x)$$



$\lambda = 0, \ \mu = 1$

$\left(y_1' = y_1 + y_2 \leftarrow \text{SISTEMA ORIGINARIO} \right)$

PER ESEMPIO $\quad \underline{y_1(x) = e^x \sin(x)}$

$$y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) = \ldots$$

$$e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x \cos(x)$$

ALTRO ESEMPIO (a variabili separabili)

$$y' = r\,y\left(1-\frac{y}{K}\right) = \frac{r}{K}\,y(K-y) \qquad \text{EQUAZIONE LOGISTICA}$$

MODELLO PER UNA POPOLAZIONE CON "TASSO DI CRESCITA" r CON RISORSE LIMITATE: se $y \simeq 0$ l'equazione è $\simeq y' = ry$

Al crescere di y il fattore $\left(1-\frac{y}{K}\right)$ diventa sempre più piccolo

Al valore $y = K$ le risorse "sono al limite"

STUDIAMO LE SOLUZIONI DI QUESTA EQUAZIONE.

SOL. COSTANTI $y = K$, $y = 0$

SE prendo $0 < y_0 < K$ HO:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{K\,ds}{s(K-s)} = r\int_{x_0}^{x} dt = r(x-x_0)$$

$$\boxed{\frac{K}{s(K-s)}} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-K} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-K} = \frac{s-K-s}{s(s-K)}$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-K}\right) ds = \left[\ln \left| \frac{s}{s-K} \right| \right]_{y_0}^{y(x)} = \ln \frac{s}{K-s} \Big|_{y_0}^{y(x)} =$$

$$\ln \left(\frac{y(x)}{K-y(x)}\right) - \ln\left(\frac{y_0}{K-y_0}\right)$$

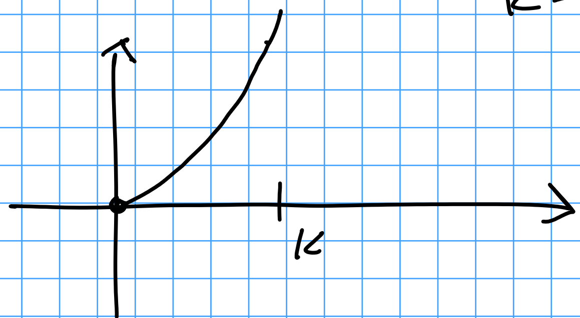
DUNQUE

$$\ln \frac{\frac{y(x)}{K-y(x)}}{\frac{y_0}{K-y_0}} = r(x-x_0) \iff$$

$$\boxed{\frac{y(x)}{K-y(x)} = \frac{y_0}{K-y_0} e^{r(x-x_0)}}$$

(forma implicita)

$$F(s) = \frac{s}{K-s} \quad \text{su }]0, K[$$



$$y' = \frac{r}{K} y (K-y)$$

- sol. costanti $y=0$, $y=K$
- parto da $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < y_0 < K$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)(K-y(t))} dt = \int_{x_0}^{x} r \, dt$$

$\underline{y(t) = s}$, $ds = y'(t) dt$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{s(K-s)}$$

$$\frac{K y'}{y(K-y)} = r \iff \int_{y_0}^{y(x)} \frac{K s}{s(K-s)} ds = r(x-x_0)$$

$$\frac{K}{s(K-s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-K} = \frac{s-K-s}{s(s-K)} = \frac{-K}{s-K} = \frac{K}{K-s}$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-K}\right) ds = \left[\ln\left|\frac{s}{s-K}\right|\right]_{y_0}^{y(x)} =$$

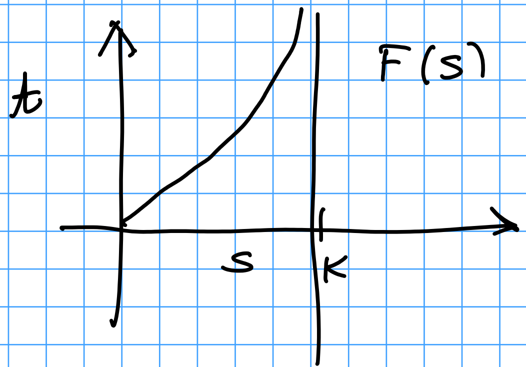
$$\ln \frac{\frac{y(x)}{K-y(x)}}{\frac{y_0}{K-y_0}}$$

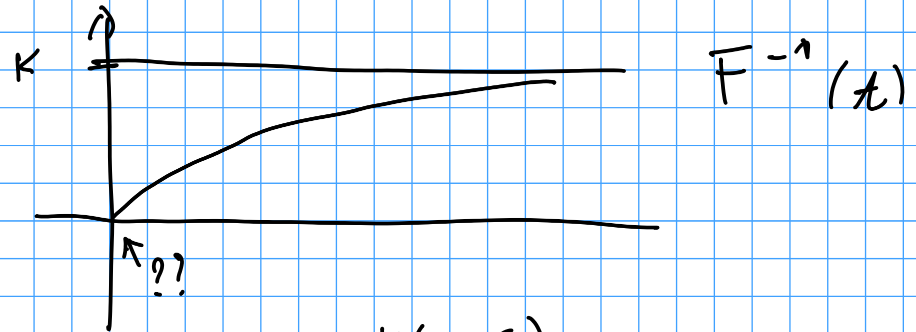
DUNQUE

$$\frac{y(x)}{K-y(x)} = \frac{y_0}{K-y_0} e^{r(x-x_0)}$$

$$F(s) = \frac{s}{K-s} = t \iff s = (K-s)\,t \iff$$

$$s\,(1+t) = K t \qquad s = \frac{Kt}{1+t}$$



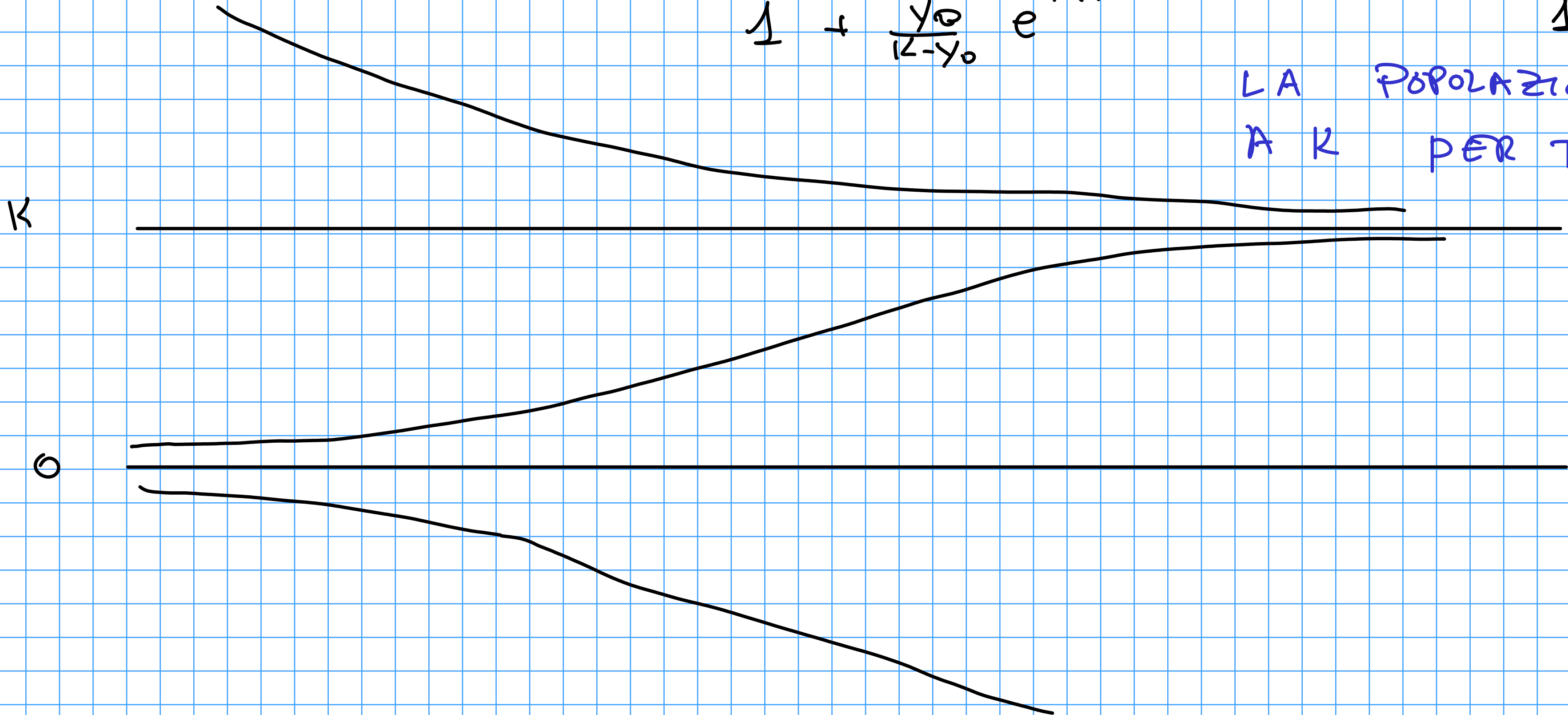


$$C = \frac{y_0}{K-y_0}\, e^{-x_0 r}$$

$$\downarrow$$

DUNQUE $$y(x) = K \frac{\frac{y_0}{K-y_0}\, e^{r(x-x_0)}}{1 + \frac{y_0}{K-y_0}\, e^{r(x-x_0)}} = K \frac{c\, e^{rx}}{1 + c\, e^{rx}}$$

LA POPOLAZIONE $\leq K$, TENDE A K PER TEMPO ∞

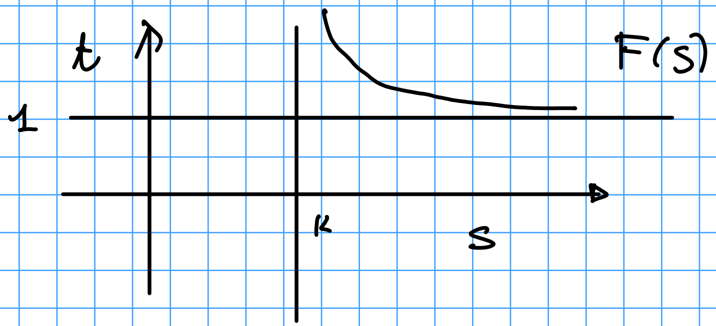


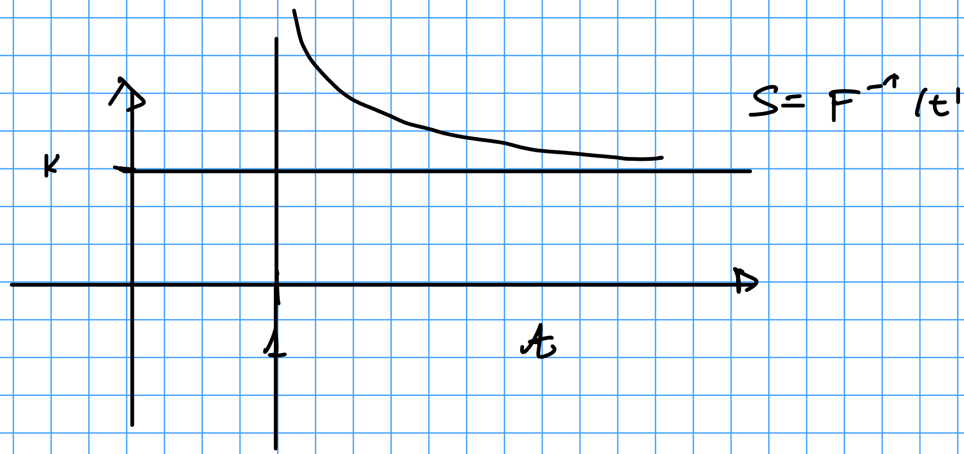
Se $y_0 > K$ rifaccio gli stessi calcoli

$$\ln \frac{\dfrac{y(x)}{y(x)-K}}{\dfrac{y_0}{y_0-K}} = e^{r(x-x_0)} \iff$$

$$\frac{y(x)}{y(x)-K} = \frac{y_0}{y_0-K} e^{r(x-x_0)}$$

$F(s) = \dfrac{s}{s-K}$ per $s > K$





$$\frac{s}{s-K} = t \iff s = st - Kt \iff s(t-1) = Kt \iff s = \frac{Kt}{t-1}$$

$$y(x) = K \frac{c\, e^{rx}}{e^{rx} - 1}$$

Torniamo sul problema del sistema di ordine N. LINEARE

$$(S) \quad Y'(x) = A(x)\, Y(x) + B(x)$$

dove $Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_N(x) \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{1N}(x) \\ a_{N1}(x) & a_{NN}(x) \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_N(x) \end{pmatrix}$

$$(S_0) \quad Y'(x) = A(x)\, Y(x)$$

<u>FATTI</u> Valgono le stesse proprietà "strutturali" trovate nel caso dell'eq. di ordine.

(1) Le soluzioni dell'omogenea ($B=0$) formano uno spazio lineare di dimensione N. Cioè esistono

$Y_1 \dots Y_N$ soluzioni di (S_0), tali che

(1) se $\lambda_1 Y_1(x) + \dots + \lambda_N Y_N(x) = 0 \;\; \forall x \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$

(2) Se Y risolve $(S_0) \Rightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_N$ tali che

$$Y(x) = \lambda_1 Y_1(x) + \dots + \lambda_N Y_N(x)$$

(2) Le sol. di (S) sono date da una sol. particolare

+ tutte le sol. di (S_0). Cioè

Se $\bar{Y}$ è sol. di (S) si ha

Y risolve $(S) \Leftrightarrow$ esiste Y_0 sol di (S_0) tale che $Y = \bar{Y} + Y_0$

Costruzione di e^A dove A è una matrice ??

- DATA A matrice $N \times N$ posso considerare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \lim_{m \to \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}}_{\text{MATRICE } N\times N} \quad \left(\text{componente per componente} \right|$$

SI VEDE CHE QUESTO LIMITE ESISTE QUALUNQUE SIA A.
(imitando il caso reale)

- DATE A e B matrici $N \times N$ posso dire che

$$e^A e^B = \sum_{0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \underset{\phi}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$$

(si fa come nel caso dei numeri)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{n-k} \underset{\overset{\Uparrow}{\boxed{AB=BA}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}$$

$$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

DUNQUE $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ se $AB = BA$

$$e^0 = I$$

• Consideriamo $M(x) = e^{xA}$, $x \in \mathbb{R}$ → MATRICE NXN

$$\frac{M(x_0+h) - M(x_0)}{h} = \frac{e^{(x_0+h)A} - e^{x_0 A}}{h} = e^{x_0 A} \frac{e^{hA} - I}{h}$$

(perché $(x_0+h)A$ e $x_0 A$ commutano) ORA

$$\frac{e^{hA} - I}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m A^m}{m!} - I\right) = \frac{1}{\cancel{h}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h^{\cancel{n}\, n-1} A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} A^n}{n!}$$

$$= A \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h^{n-1} A^{n-1}}{m!} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^n A^n}{(m+1)!} \xrightarrow{h \to \infty} A \cdot I = A$$

(supponiamo di poter portare il limite dentro la serie)

e tornando indietro $\dfrac{e^{(x_0+h)A} - e^{x_0 A}}{h} \to A\, e^{x_0 A}$ (COMPONENTE PER COMPONENTE)

in altri termini $\dfrac{d}{dx} e^{xA} = A\, e^{xA}$

- Se prendo $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ e definisco

$$\underline{Y(x) = e^{xA}\, Y_0} \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = Y_0 \\ Y'(x) = A\, e^{xA}\, Y = A\, Y(x) \end{cases}$$

HO TROVATO UNA FORMULA PER LA SOLUZIONE DEL SISTEMA OMOGENO DI ORDINE N A COEFF. COSTANTI

OSS. • Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

A LIVELLO DEL SISTEMA Ito

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_N' = \lambda_N y_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = y_1(0) e^{\lambda_N x} \\ \vdots \\ y_N(x) = y_N(0) e^{\lambda_N x} \end{cases}$$

- Se $A = M B M^{-1}$ $\Rightarrow$

$$A^n = \underbrace{M B \cancel{M^{-1}} \cancel{M} B M^{-1} \cdots M B M^{-1}}_{n \text{ VOLTE}} = M B^n M^{-1}$$

$$\Rightarrow e^A = M e^B M^{-1}$$

$\Rightarrow$ se trovo un cambio di coordinate M per cui so calcolare e^B $\Rightarrow$ riesco a calcolare e^A

CASO GENERALE DI

$$Y'(x) = A(x) Y(x) + B(x)$$

si può scrivere la formula analoga al caso $N=1$

e cioè

$$\bar{A}(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)\,dt$$

(integro componente per componente)

$$Y(x) = e^{\bar{A}(x)} \left\{ Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\bar{A}(t)} B(t)\,dt \right\}$$

PER USARLA DOVREI CONOSCERE $e^{\bar{A}(x)}$ . . . . .