Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentanovesima lezione, 11 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

$$a_N y^{(N)} + \dots + a_0 y = b(x)$$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE. RICORDO CHE $P(z) = a_N z^N + \dots + a_0$ (polinomio caratteristico). Si potrebbe trovare un procedimento valido per ogni $b(x)$ (a partire dalle sol. dell'omogenea), cercando

$$y(x) = v_1(x)\, y_1(x) + \dots + v_N(x)\, y_N(x)$$

dove $y_1 \dots y_N$ sono N sol. indipendenti dell'omogenea e $v_1 \dots v_N$ sono funzioni da trovare LO FARETE L'ANNO PROSSIMO

CONSIDERIAMO SOLO I CASI:

$$b(x) = p(x) \qquad p(x) \text{ polinomio}, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$b(x) = p(x)\, e^{ax}$$
$$b(x) = p(x) \sin(ax)$$
$$b(x) = p(x) \cos(ax)$$

(ed eventualmente combinazioni lineari di tali funzioni)

SE CI METTIAMO (DI NUOVO) IN $\mathbb{C}$ basta considerare il caso

$$\boxed{b(x) = p(x)\, e^{z_0 x}} \qquad \text{con } p \text{ polinomio e } z_0 \in \mathbb{C}$$

DUNQUE STUDIAMO $a_N y^{(N)} + \dots + a_0 y = p(x) e^{z_0 x}$

IDEA: cerco una soluzione del tipo $y(x) = q(x) e^{z_0 x}$, q polinomio

– MI PIACEREBBE con grado $(q) \leq$ grado (p)

QUESTO È POSSIBILE SE $P(z_0) \neq 0$. Per trovare tale sol. devo scrivere il generico polinomio $q(x)$ (grado $(p)+1$ costanti da trovare) e impongo che valga l'equazione $\Rightarrow$ SISTEMA che individua q.

ESEMPIO

$$y'' - y = x e^{3x}$$

($p(x) = x$ di grado 1)

In questo caso $P(z) = z^2 - 1 \Rightarrow$ RADICI ± 1 (sol. omog. $\lambda e^{x} + \mu e^{-x}$)

$P(3) \neq 0 \Rightarrow$ posso cercare $\bar{y}(x) = \underbrace{(a x + b)}_{q(x)} e^{3x}$. ALLORA

$$\bar{y}(x) = (ax+b) e^{3x}$$

$$\bar{y}'(x) = a e^{3x} + 3(ax+b) e^{3x} = (3ax + 3b + a) e^{3x}$$

$$\bar{y}''(x) = 3a e^{3x} + 3(3ax + 3b + a) e^{3x} = (9ax + 9b + 6a) e^{3x}$$

IMPONENDO L'EQ. $\Rightarrow \bar{y}'' - y = \cancel{e^{3x}} (9ax + 9b + 6a - ax - b) = \cancel{e^{3x}} x$

$\iff \quad 8ax + 8b + 6a = x \iff \begin{cases} 8a = 1 \\ 6a + 8b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/8 \\ b = \frac{6}{64} = -\frac{3}{32} \end{cases}$

DUNQUE HO LA SOL. $\boxed{\bar{y}(x) = \frac{4x-3}{32} e^{3x}}$

Se devo risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = x e^{3x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} + \frac{4x-3}{32} e^{3x}$$

$$\left(e \quad y'(x) = \lambda e^{x} - \mu e^{-x} + \frac{12x-5}{32} e^{3x} \right.$$

IMPONENDO LE COND. INIZ. $\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{3}{32} \\ \lambda - \mu = +\frac{5}{32} \end{cases} \iff$

SOMMO LE RIGHE ; $2\lambda = \frac{8}{32}$

DIFFERENZA : $2\mu = -\frac{2}{32}$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \\ \mu = -\frac{1}{32} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE $y(x) = \dfrac{-e^{x} + 4e^{-x} + 4x - 3}{32}$

ALTRO ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' - y = x\sin(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

NOTO CHE $\sin(x) = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)$

CONVIENE (è un modo possibile) RISOLVERE IN $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} y'' - y = x\, e^{ix} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(poi prendiamo la parte immaginaria della soluzione ...)

SOL. PARTICOLARE $\bar{y}(x) = (ax+b)\, e^{ix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$

$$\bar{y}(x) = (ax+b)\, e^{ix}$$

$$\bar{y}'(x) = a\, e^{ix} + i\,(ax+b)\, e^{ix} = (iax + ib + a)\, e^{ix}$$

$$\bar{y}''(x) = ia\, e^{ix} + i(iax + ib + a) = (-ax - b + 2ia)\, e^{ix} \implies$$

$$\bar{y}''(x) - \bar{y}(x) = e^{ix}\left(-ax - b + 2ia - ax - b\right) = e^{ix}\left(-2ax - 2b + 2ia\right) = x e^{ix}$$

$$\iff \quad -2a = 1 \,, \quad -2b + 2ia = 0$$

$a = -\frac{1}{2}$ $\quad b = -\frac{i}{2}$ $\quad$ e quindi $\quad \bar{y}(x) = -\frac{x+i}{2} e^{ix}$

$$= -\frac{1}{2}(x+i)(\cos(x) + i\sin(x)) =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(x\cos(x) - \sin(x)\right) + i\left(x\sin(x) + \cos(x)\right)\right]$$

quello che ci interessa

$\boxed{\bar{y}_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x\sin(x) + \cos(x)\right)}$ risolve $\quad y'' - y = x\sin(x)$

$\left[\bar{y}_1(x) = -\frac{1}{2}\left(x\cos(x) - \sin(x)\right)\right.$ risolve $\quad \left. y'' - y = x\cos(x)\right]$

Per risolvere il Problema di Cauchy :

$$y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} - \frac{1}{2}x\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$$

$$y'(x) = \lambda e^{x} - \mu e^{-x} - \frac{1}{2}x\cos(x) - \cancel{\frac{1}{2}\sin(x)} + \cancel{\frac{1}{2}\sin(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad \lambda = \mu = \frac{1}{4} \Rightarrow y(x) = \frac{e^{x} + e^{-x} - 2x\sin x - 2\cos(x)}{4}$$

Se voglio evitare di risolvere il problema con $b(x) = x e^{ix}$
posso ragionare direttamente cercando

$$\bar{y}(x) = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x) \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

(invece di $(ax+b)e^{ix}$ $\quad a,b \in \mathbb{C}$

IN GENERALE SE $b(x) = p(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ / $p(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

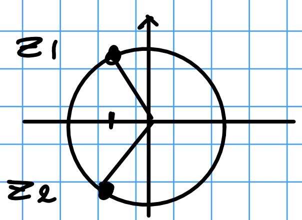
CON $p(x)$ polinomio di grado K, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, SE
$P(\alpha + i\beta) \neq 0$ ALLORA CERCO $\bar{y}(x)$ DEL TIPO

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x}\left(q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)\right)$$

con q_1, q_2 polinomi di grado $\leq K$.

ALTRO ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \cos(\omega x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$ con ω parametro, $\omega > 0$



$P(z) = z^2 + z + 1$ RADICI $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ sol. dell' omogenea $\quad y_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

NOTA: TUTTE LE SOL. DELL' OMOGENEA TENDONO A ZERO SE $x \to +\infty$

(in $\mathbb{C}$ sono $y(x) = \lambda e^{z_1 x} + \mu e^{z_2 x} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$)

NOTA: $P(i\omega) \neq 0$, dato che $i\omega$ NON È NÉ z_1 NÉ z_2

CERCO LA SOL. PARTICOLARE. POTREI

(I) cercarla con $b_1(x) = e^{i\omega x}$ e poi prendo la parte reale

$\boxed{\text{cerco } \bar{y}_1(x) = a e^{i\omega x}}$

(II) cercarla del tipo $\bar{y}(x) = a\cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$

USIAMO (I) [PROVATE CON II] : considero

$$y'' + y' + y = e^{i\omega x}$$

e cerco $\bar{y}(x) = a e^{i\omega x}$ con $a \in \mathbb{C}$, derivo:

$$\bar{y}'(x) = a i\omega e^{i\omega x}, \quad \bar{y}''(x) = a(-\omega^2) e^{i\omega x}$$

IMPONGO L'EQUAZIONE:

$$a\, e^{i\omega x}\left(-\omega^2 + i\omega + 1\right) = a\, P(i\omega)\, e^{i\omega x}$$

[FATTO GENERALE: se metto $e^{z_0 x}$ nell'equazione trovo $P(z_0)\, e^{z_0 x}$]

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1} \left(= \frac{1}{P(i\omega)} \right) = \frac{-\omega^2 - i\omega + 1}{(1-\omega^2)^2 + 1}$$

$$\overset{\Uparrow}{a}$$

[REMEMBER: $z = a + ib \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$]

DUNQUE $\bar{y}_1(x) = \dfrac{-\omega^2 - i\omega + 1}{(1-\omega^2)^2 + 1} \Big(\underbrace{\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)}_{e^{i\omega x}} \Big)$

$\Rightarrow$ LA PARTE REALE

$$\bar{y}(x) = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2-1)^2 + 1} \cos(\omega x) + \frac{\omega}{(\omega^2-1)^2+1} \sin(\omega x)$$

MI PIACEREBBE SCRIVERE $\bar{y}(x)$ come $\underset{\text{AMPIEZZA}}{A(\omega)} \cos\big(\omega(x - \underset{\text{SFASAMENTO}}{\varphi_\omega})\big)$

PER QUESTO DEVO SCRIVERE IN "FORMA POLARE" IL NUMERO COMPLESSO

$$z_\omega = \frac{1-\omega^2}{(\omega^2-1)^2+1} - i \frac{\omega}{(\omega^2-1)^2+1} = \frac{1}{P(i\omega)} \qquad \left[\bar{y}_1(x) = \frac{e^{i\omega x}}{P(i\omega)} \right]$$

VIENE : $|z_\omega| = \frac{1}{|p(i\omega)|} = \frac{1}{|1-\omega^2+i\omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^4-\omega^2+1}} = A(\omega)$$

$\theta = \operatorname{Arg}(z_\omega)$: $\quad tg(\theta) = \frac{-\omega}{1-\omega^2} = \frac{\omega}{\omega^2-1} \quad \left(\cos(\theta) = \frac{1-\omega^2}{\dots} \; , \; \sin(\theta) = \frac{-\omega}{\dots} \right)$

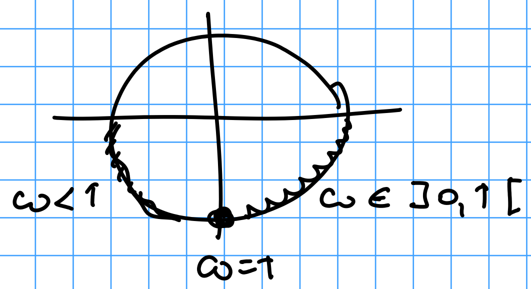
$$-\pi < \theta < 0$$

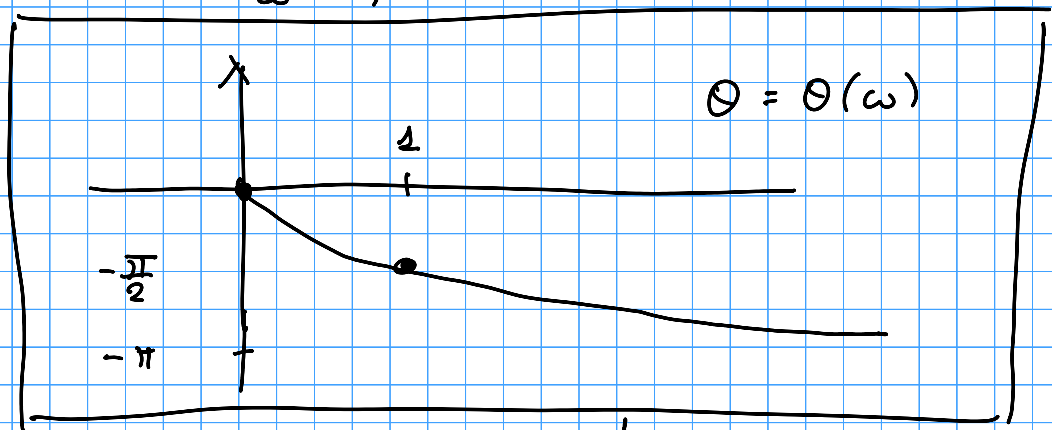
DUNQUE :

SE $\omega = 1$ $\quad (z_\omega = -i) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

SE $0 \leq \omega < 1$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega^2-1}\right)$

SE $\omega > 1$ $\quad \theta = \operatorname{artg}\left(\frac{\omega}{\omega^2-1}\right) - \pi$



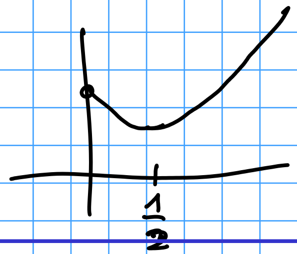


VEDIAMO ANCHE COME È FATTO $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4-\omega^2+1}}$

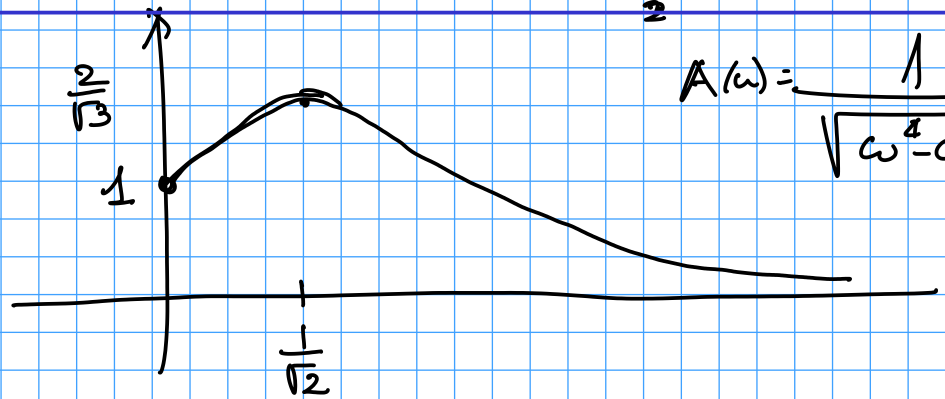
se guardo la parabola $t^2 - t + 1$ vedo che, NON HA RADICI

il vertice ha coordinate $(2t - 1 = 0)$ $\boxed{t = 1/2}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$



$\Longrightarrow$



$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - \omega^2 + 1}}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}$$

Se $z \in \mathbb{C}$

$\rho =$ MODULO di z

$\theta = \operatorname{Arg}(z)$

$\Updownarrow$

$z = \rho e^{i\theta}$

DUNQUE:
$$\frac{1}{P(i\omega)} = A(\omega) e^{i\theta(\omega)}$$

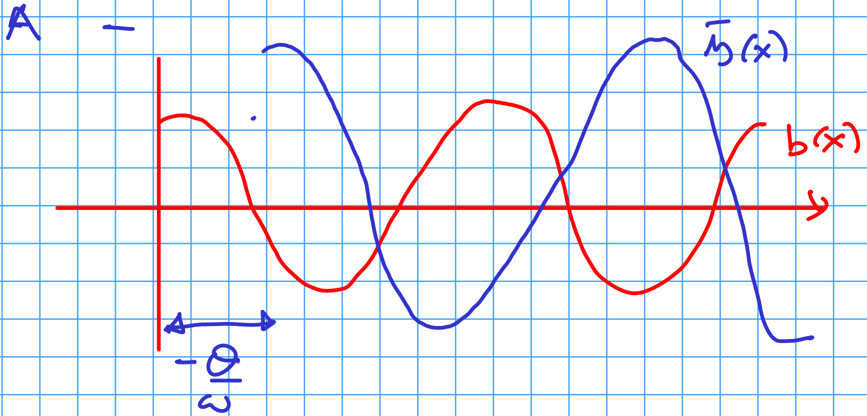
RICORDO:
$$\bar{y}_1(x) = A(\omega) e^{i\theta(\omega)} \cdot e^{i\omega x}$$
$$= A(\omega) e^{i[\omega x + \theta(\omega)]} =$$
$$A(\omega) \cos(\omega x + \theta(\omega)) + i A(\omega) \sin(\omega x + \theta(\omega))$$

SE VOGLIO LA PARTE REALE TROVO

$$\boxed{\bar{y}(x) \quad A(\omega)\cdot\cos(\omega x + \theta(\omega))}$$

DUNQUE LA SOL. PARTICOLARE È ANCORA UN $\cos(\omega x)$

DI AMPIEZZA $A(\omega)$ e sfasamento $\theta(\omega)$



I conti fatti mostrano che l'ampiezza massima si ha per $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se $\omega \to +\infty$ l'ampiezza $\to 0$

OSSERVIAMO CHE LA SOLUZIONE COMPLETA È $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$

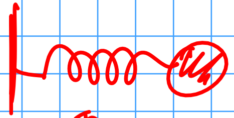
CON y_0 sol. dell'omogenea. Però, se x GRANDE y_0 PICCOLA

DIPENDE DALLE CONDIZIONI INIZIALI.

DUNQUE $\bar{y}(x)$ è "ciò che vedi" per X GRANDE

SE CONSIDERO IN GENERALE $a y'' + b y' + c y = \cos(\omega x)$

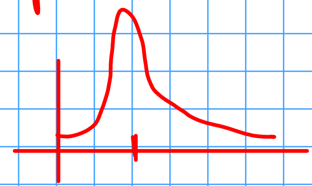
con $a, b, c \geq 0$ (CORRISPONDE A UNA MOLLA CON ATTRITO



cost elastica K

$$F = ma = m y''$$
$$\| $$
$$-Ky - \alpha y' + \cos(\omega x) \iff m y'' + \alpha y' + K y = \cos(\omega x)$$

si vede che se α / (b) $\to 0$ l'ampiezza con cui tende a oscillare il sistema, ha un picco che tende a essere ∞ per $\alpha = 0$ ($b=0$)



<u>ESEMPIO</u> ("GUIDA")

$$y'' + y = \cos(\omega x) \qquad (\omega \geq 0)$$

$P(z) = z^2 + 1$ RADICI $= \pm i$

EQ. OMOGENEA $\implies y_0(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$

SOL. PARTICOLARE DI $y'' + y = e^{i\omega x}$ (ma complessi)

CERCO $\bar{y}(x) = \alpha e^{i\omega x} \iff \bar{y}'' - y = \alpha P(i\omega) e^{i\omega x}$

$$\bar{y}_1(x) = \frac{e^{i\omega x}}{P(i\omega)}$$ PURCHÉ $\omega \neq 1$ ($P(i) = 0$!!)

CONSIDERO IL CASO $\omega \neq 1$, TROVO

$$P(i\omega) = 1-\omega^2 \iff \frac{1}{P(i\omega)} = \frac{1}{1-\omega^2}$$

$$\bar{y}_1(x) = \frac{e^{i\omega x}}{1-\omega^2} = \frac{\cos(\omega x)}{1-\omega^2} + i\,\frac{\sin(\omega x)}{1-\omega^2}$$

$\Rightarrow$ la parte reale è $\bar{y}(x) = \dfrac{\cos(\omega x)}{1-\omega^2}$ $\quad (\omega \neq 1)$

COSA FACCIAMO SE $\omega = 1$

CERCO UNA SOL. PARTICOLARE DEL TIPO $a x e^{ix}$ $\quad (\omega = 1)$

(NOTA CHE i È RADICE SEMPLICE DI $P(z)$)

Quindi impongo che $\bar{y}_0(x) = a x e^{ix}$ risolva $y'' + y = e^{ix}$

$$\bar{y}_1(x) = a x e^{ix}, \quad \bar{y}_1'(x) = a e^{ix} + i a x e^{ix} = a(ix+1)e^{ix}$$

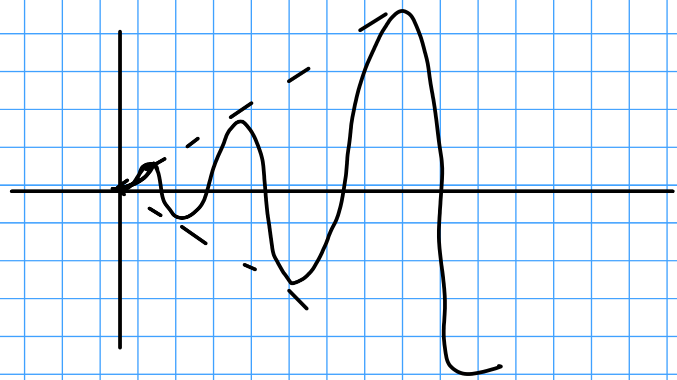
$$\bar{y}_1''(x) = i a e^{ix} + i a(ix+1)e^{ix} = a e^{ix}(i - x + i) = a e^{ix}(-x+2i)$$

$$\iff y'' + y = a e^{ix}(-x + 2i + x) = a e^{ix} \cdot 2i$$

PER CUI $a = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$

ALLORA $y_1(x) = -\frac{i}{2}x\, e^{ix} = -\frac{ix}{2}\left[\cos(x) + i\sin(x)\right] = \frac{x}{2}\left[-i\cos(x) + \sin(x)\right]$ $\Rightarrow$ LA PARTE REALE VIENE

$$\boxed{\bar{y}(x) = \frac{x}{2}\sin(x)}$$ sol particolare di $y'' + y = \cos(x)$



(RISONANZA)

$\bar{y}$ è tale che

$\bar{y}(0) = \bar{y}'(0) = 0$

(si vede facilmente) $\Rightarrow$ $\bar{y}$ è la soluzione con $y'(0) = y(0) = 0$

REGOLA GENERALE: dato il problema

$$a_N y^{(N)} + \dots + a_0 y = p(x)\, e^{z_0 x}$$

dove $p(x)$ è un polinomio di grado k e $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $P(z)$ di molteplicità m $\left(P(z_0) = P'(z_0) = \dots = P^{(m-1)}(z_0) = 0\right.$

$m = 0$ se $P(z_i) \neq 0$). Allora posso trovare una soluzione del tipo

$$\bar{y}(x) = q(x)\, e^{z_0 x}$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado $K+M$ ←

in questo polinomio i coefficienti $q_0, q_1, \dots q_{M-1}$ si possono prendere nulli – DI FATTO DEVO TROVARE $K+1$ COEFFICIENTI,

$q_M, \dots, q_{M+K}$