Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentottesima lezione, 5 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

EQ. LINEARE DI ORDINE N (IN FORMA NORMALE $\to a_N(x)=1$)

(E) $y^{(N)} + a_{N-1}(x)\, y^{(N-1)} + \dots + a_0(x)\, y = b(x)$

(E₀) " " " $= 0$

dove $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, b : I \to \mathbb{R}$ continue, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

(E) si abbina alle cond. iniziali: dati $x_0, y_0, y_1, \dots y_N \in \mathbb{R}$

(C.I) $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(N-1)}(x_0) = y_{N-1}$

(E) + (C.I) $\triangleq$ PROBLEMA DI CAUCHY

SE $b=0$ (lo indico con (E_0)) l'equazione si dice OMOGENEA

METTIAMO IN EVIDENZA ALCUNE PROPRIETÀ "STRUTTURALI" di (E)/(E₀)

TEOREMA (A) FISSATO $x_0 \in I \Rightarrow \forall\ y_0 \dots y_{N-1}$ esiste unica la soluzione di (E), verificate le condizioni iniziali.

E y È DEFINITA SU TUTTO I.

(SENZA DIM.)

TEOREMA (a) Se y_1 e y_2 sono soluzioni di $(E_0) \Rightarrow$

$\lambda y_1 + \mu y_2$ è soluzione di (E_0) (per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

L'INSIEME $S_0 = \{ y : I \to \mathbb{R}$ tali che y risolve $(E_0) \}$

è uno spazio lineare.

(b) Se y_0 è soluzione di (E_0) e $\bar{y}$ è sol. di (E)

$\Rightarrow$ $y_0 + \bar{y}$ è soluzione di (E)

(c) Se y_1 e y_2 sono soluzioni di $(E) \Rightarrow y_1 - y_2$ è soluzione di (E_0)

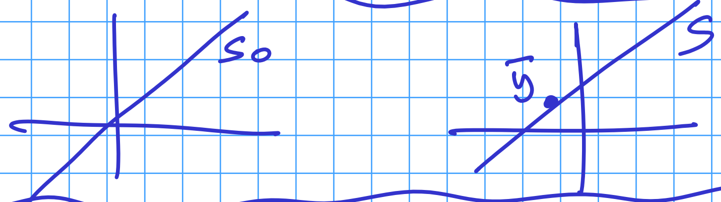
(b)+(c) $\rightsquigarrow$ L'INSIEME $S = \{ y : I \to \mathbb{R}$ tali che y risolve $E \}$

è uno "spazio affine" cioè $S = \bar{y} + S_0 =$

$\{ \bar{y} + y_0$ con $y_0 \in S_0 \}$

dove $\bar{y}$ è una (qualunque) sol. di (E) $(\bar{y} \in S)$

IDEA:



DATA UNA SOL. $\bar{y}$ di (E) tutte le altre si trovano aggiungendo una qualunque sol. y_0 di (E_0)

PER RISOLVERE (E) BISOGNA:

- TROVARE UNA SOL. DI (E)
- TROVARE TUTTE LE SOL. DI (E_0)

DIM. (di a), b), c)). (a) Siano y_1 y_2 sol. di (E_0)

$$y_1^{(N)} + a_{N-1}\, y_1^{(N-1)} + \dots + a_0\, y_1 = 0$$

$$y_2^{(N)} + a_{N-1}\, y_2^{(N-1)} + \dots + a_0\, y_2 = 0$$

MOLTIPLICO LA PRIMA PER λ, LA SECONDA PER μ, SOMMO $\Rightarrow$

$$\underbrace{\lambda y_1^{(N)} + \mu y_2^{(N)}}_{(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(N)}} + a_{N-1}\left(\lambda y_1^{(N-1)} + \mu y_2^{(N-1)}\right) + \dots + a_0\left(\lambda y_1 + \mu y_2\right) = 0$$

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(N)} + a_{N-1}(\lambda y_1 + \mu y_2)^{(N-1)} + \dots + a_0(\lambda y_1 + \mu y_2) = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda y_1 + \mu y_2$ risolve (E_0)

(b) Siano y_1 sol. di (E) y_0 sol. di (E_0) $\Rightarrow$

$$y_1^{(N)} + a_{N-1} y_1^{(N-1)} + \dots + a_0 y_1 = b$$
$$y_0^{(N)} + a_{N-1} y_0^{(N-1)} + \dots + a_0 y_0 = 0$$

SOMMO $\Rightarrow$ $y_1 + y_0$ è sol di (E)

(C) Siano y_1 y_2 sol. di (E)

$$y_1^{(N)} + a_{N-1} y_1^{(N-1)} + \dots + a_0 y_1 = b$$
$$y_2^{(N)} + a_{N-1} y_2^{(N-1)} + \dots + a_0 y_2 = b$$

FACCIO LA DIFFERENZA $\Rightarrow$ $y_1 - y_2$ è sol. di (E_0)

<u>TEOREMA</u> Lo spazio lineare $S_0 = \{$ soluzioni di (E_0) $\}$ ha dimensione N $\Leftrightarrow$ ESISTONO $v_1, \dots v_N$ soluzioni di (E_0) tali che

(i) Se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N = 0$ (è la funzione nulla) $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$

$(\lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_N v_N(x) = 0 \quad \forall x)$

(ii) Se y è soluzione di (E_0) $\Rightarrow$ $\exists$ $\underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_N}$ tali che

UNICI A CAUSA DI (i)

$$y(x) = \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_N v_N(x)$$

DIM: DEFINISCO $v_1 \dots v_N$ COME LE SOL. DI (E_0) con condizioni
$(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots 0)$ - - - - $(0, \dots, 0, 1)$

(v_1 è tale che $v_1(x_0) = 1$, $v_1'(x_0) = 0$, ... , $v_N^{(N-1)}(x_0) = 0$
v_2 è tale che $v_2(x_0) = 0$, $v_2'(x_0) = 1$ . . . $v_N^{(N-1)}(x_0) = 0$
⋮
v_N è tale che $v_N(x_0) = 0$, $v_N'(x_0) = 0$ . . . $v_N^{(N-1)}(x_0) = 1$)

CHE ESISTONO PER IL TEOREMA (★)

(i) DICO CHE $v_1 \dots v_N$ SONO LIN. INDIP: (cioè vale (i))

Siano quindi $\lambda_1 \dots \lambda_N$ tali che, posto

$$y(x) = \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_N v_N(x)$$

risulti $y(x) = 0 \ \forall x$. ALLORA $y'(x) = y^{(11)}(x) = \dots = y^{(N-1)}(x) = 0$

$\forall x_0$. IN PARTICOLARE

$$0 = y(x_0) = \lambda_1 v_1(x_0) + \lambda_2 v_2(x_0) + \dots + \lambda_N v_N(x_0) = \lambda_1 v_1(x_0) = \lambda_1$$

$$0 = y'(x_0) = \lambda_1 v_1'(x_0) + \lambda_2 v_2'(x_0) + \dots + \lambda_N v_N'(x_0) = \lambda_2 v_2'(x_0) = \lambda_1$$

⋮

$$0 = y^{(N-1)}(x_0) = \lambda_1 v_1^{(N-1)}(x_0) + \lambda_2 v_2^{(N-1)}(x_0) + \dots + \lambda_N v_N^{(N-1)}(x_0) = \lambda_N v_N^{(N-1)}(x_0) = \lambda_N$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0$

(ii) DICO che $v_1 \dots v_N$ "generano S_0": dato una sol. y posso esprimere y come combinazione lin. di $v_1 \dots v_N$

DATA y soluzione pongo $\lambda_1 = y(x_0)$, $\lambda_2 = y'(x_0)$, ..., $\lambda_N = y^{(N-1)}(x_0)$

e considero $v(x) = \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_N v_N(x)$.

OVVIAMENTE $v(x)$ risolve (E_0). INOLTRE

$$\left.\begin{aligned} v(x_0) &= \lambda_1 = y(x_0) \\ v'(x_0) &= \lambda_2 = y'(x_0) \\ v^{(N-1)}(x_0) &= \lambda_N = y^{(N-1)}(x_0) \end{aligned}\right\}$$ v risolve lo stesso problema di Cauchy di y

PER L'UNICITA' DEVE ESSERE $y = v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N$

\#

PER TROVARE TUTTE LE SOL. DI (E_0) BASTA TROVARNE N che siano LINEARMENTE INDIPENDENTI.

NEL CASO $N=1$ ABBIAMO LA FORMULA

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x_0} b(t) e^{-A(t)} dt \qquad y_0 \in \mathbb{R}$$

soluzioni dell'omogenea – al variare di y_0 –

sol. particolare (quella che vale 0 in x_0)

PER RISOLVERE ESPLICITAMENTE (E_0) / (E) CONSIDERIAMO IL CASO $a_0(x), a_1(x) \cdots a_{N-1}(x)$ SONO <u>COSTANTI</u> $a_0 \cdots a_{N-1} \in \mathbb{R}$

CONVIENE, IN QUESTO CASO, TRATTARE ANCHE IL CASO COMPLESSO, CIOÈ CONSIDERARE

$$(E) \quad a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \cdots + a_0 y = b(x)$$

dove $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$, e $b: I \to \mathbb{C}$ $\left(b(x) = b_1(x) + i b_2(x) \right.$

Risolvere in questo caso significa trovare $y: I \to \mathbb{C}$ e cioè

$y(x) = u(x) + i v(x)$ con $u, v : I \to \mathbb{R}$, derivabili N volte

tali che $a_N \left(u^{(N)} + i v^{(N)} \right) + \cdots + a_0 (u + iv) - b_1(x) - i b_2(x) = 0$

NEL SENSO CHE PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA DEVONO ESSERE ZERO $\forall x$

COMINCIAMO CON L'OMOGENEA $(b=0)$ $\rightarrow (E_0)$

NOTAZIONE CHIAMO POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_0$$

IDEA: CERCO SOL. DI (E_0) del tipo $y(x) = e^{z_0 x}$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$

RICORDIAMO CHE, se $z_0 = a + ib \Rightarrow e^{z_0 x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$

DICO CHE $\boxed{y'(x) = z_0 e^{z_0 x}}$. IN EFFETTI SE $z_0 = a + ib$

$$\frac{d}{dx} e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) = a e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) +$$

$$e^{ax} b(-\sin(bx) + i\cos(bx)) = a e^{z_0 x} + e^{ax} ib(\cos(bx) + i\sin(bx))$$

$$(a + ib) e^{z_0 x} = z_0 e^{z_0 x}$$

ANALOGAMENTE $y^{(k)} = z_0^k e^{z_0 x}$ $\Rightarrow$

$$a_N y^{(N)} + a_{N-1} y^{(N-1)} + \dots + a_0 y =$$

$$a_N z_0^N e^{z_0 x} + a_{N-1} z_0^{N-1} e^{z_0 x} + \dots + a_0 e^{z_0 x} =$$

$$P(z_0)\, e^{z_0 x}$$

SE VOGLIO CHE y sia soluzione DEVE ESSERE $P(z_0)=0$

DUNQUE OGNI RADICE z_0 di P produce una soluzione $y(x)=e^{z_0 x}$

FATTO: Se z_1 z_2 .. z_k sono diversi

$$y_1 = e^{z_1 x}, \quad y_2 = e^{z_2 x}, \quad \dots \quad y_k = e^{z_k x}$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

(LO DIAMO PER BUONO) Per esempio e^x e e^{2x}

sono lin. ind. $\Rightarrow$ se $\lambda e^x + \mu e^x = 0 \ \forall x \Rightarrow$

$\lambda = \mu = 0$ DIM: se non fosse $\lambda = \mu = 0 \Rightarrow$

$$\lambda e^x = -\mu e^{2x} \iff \lambda = -\mu e^x \quad \forall x$$

IMPOSSIBILE

CONSEGUENZA SE $P(z)=0$ HA N RADICI DISTINTE,

CHIAMIAMOLE $z_1 \dots z_N$, ALLORA

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \lambda_1 e^{z_1 x} + \dots + \lambda_N e^{z_N x}, \ \lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{C} \right\}$$

- LE SOL. DI E_0 sono tutte del tipo
- SE POI $a_0 \dots a_N \in \mathbb{R}$ e SE $\underset{x_1}{z_1} \dots \underset{x_N}{z_N} \in \mathbb{R}$

Allora le sol reali dell'eq. sono tutte espresse da

$$y(x) = \lambda_1 e^{x_1 x} + \dots + \lambda_N e^{x_N x} \qquad \lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$$

ESEMPI

$$y'' - y = 0$$

polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 1$ → RADICI $1, -1$

$\Rightarrow$ le sol. sono $\lambda e^{x} + \mu e^{-x}$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

se voglio risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

devo trovare λ, μ imponendo che

$$0 = y(0) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}\Big|_{x=0} = \lambda + \mu \qquad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases}$$

$$1 = y'(0) = \lambda e^{x} - \mu e^{-x}\Big|_{x=0} = \lambda - \mu$$

$\lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -\frac{1}{2}$ CIOÈ $y(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad (= \sinh(x))$

- $$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$P(z) = z^2 - 5z + 6$ RADICI $z_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ LE SOLUZIONI SONO $y(x) = \lambda e^{3x} + \mu e^{2x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Metodo di solor risolvere:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

MI SERVE UNA SOL. $\bar{y}(x)$ dell'eq. non omogenea

Se cerco $\bar{y}(x) = C$ vedo subito che va bene $C = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ le soluzioni dell'eq. sono

$$\frac{1}{6} + \lambda e^{3x} + \mu e^{2x}$$

IMPONGO LE COND INIZIALI

$$0 = \frac{1}{6} + \lambda e^{3x} + \mu e^{2x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{6} + \lambda + \mu$$

$$0 = 3\lambda e^{3x} + 2\mu e^{2x} \Big|_{x=0} = 3\lambda + 2\mu$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -\frac{1}{6} \\ 3\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = -\frac{3}{2}\lambda \\ \lambda - \frac{3}{2}\lambda = -\frac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = -\frac{3}{2}\lambda \\ -\frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

CIOÈ

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x}}$$

SIANO $a_0 \dots a_N \in \mathbb{R}$ (Mi interessano le sol. $y : I \to \underline{\underline{\mathbb{R}}}$)

COSA FACCIAMO SE P HA N RADICI DISTINTE MA NON (TUTTE) REALI ??

SUPPONIAMO CHE $z_1 = a_1 + i b_1 \; \dots \; z_N = a_N + i b_N$

(TUTTE DIVERSE) siano le radici di P

OSSERVIAMO CHE se P è un polinomio a coeff. reali

$\Rightarrow$ le radici compaiono A COPPIE CONIUGATE

DUNQUE LE RADICI SARANNO

$x_1 \dots x_K \in \mathbb{R}$ e $a_1 \pm i b_1 \dots a_h \pm i b_h$

$$K + 2h = N$$

Le sol $y(x)$ COMPLESSE di (E_0) sono date da

$$\lambda_1 e^{x_1 x} + \dots + \lambda_K e^{x_K x} + \mu_1 e^{(a_1 + i b_1)x} + \nu_1 e^{(a_1 - i b_1)x} + \dots + \mu_h e^{(a_h + i b_h)x} + \nu_h e^{(a_h - i b_h)x}$$

al variare di $\lambda_1 \dots \lambda_K, \mu_1 \dots \mu_h, \nu_1 \dots \nu_h \in \mathbb{C}$

CONSIDERIAMO UNA COPPIA DEI TERMINI CON ESPONENTE COMPLESSO

$$\mu e^{(a+ib)x} + \nu e^{(a-ib)x} =$$

$$e^{ax}\left(\mu\left(\cos(bx)+i\sin(bx)\right)+\nu\left(\cos(bx)-i\sin(bx)\right)\right)$$

$$e^{ax}\left((\mu+\nu)\cos(bx)+i(\mu-\nu)\sin(bx)\right)$$

$$= e^{ax}\left(\mu'\cos(bx)+\nu'\sin(bx)\right)$$

avendo posto $\mu' = \mu+\nu \qquad \nu' = i(\mu-\nu)$

NOTA: DATI μ e ν TROVO μ' e ν' COME SOPRA - VICEVERSA DATI μ' e ν' POSSO TROVARE UNIVOCAMENTE μ e ν

DUNQUE LA SOL. $y(x)$ si può anche scrivere

$$(*)\ y(x) = \lambda_1 e^{x_1 x} + \dots + \lambda_k e^{x_k x} + e^{a_1 x}\left(\mu_1'\cos(b_1 x)+\nu_1'\sin(b_1 x)\right) + \dots + e^{a_h x}\left(\mu_h'\cos(b_h x)+\nu_h'\sin(b_h x)\right)$$

al variare di $\lambda_1 \dots \lambda_k, \mu_1' \dots \mu_h', \nu_1' \dots \nu_h' \in \mathbb{C}$

SE PERÒ I COEFF. $\lambda\ \mu'\ \nu'$ VARIANO IN $\mathbb{R} \Rightarrow y$ è reale.

DUNQUE LE SOL. REALI SONO DATE TUTTE DA $(*)$

facendo variare le costanti in $\mathbb{R}$

MORALE ogni coppia di radici complesse $a \pm ib$ di P

mi dà le due soluzioni $e^{ax}\cos(bx)$ $\quad e^{ax}\sin(bx)$

ESEMPI

- $y'' + y = 0$

$P(z) = z^2 + 1$ RADICI $\pm i$ $\Rightarrow$

in $\mathbb{C}$ $\quad y(x) = \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

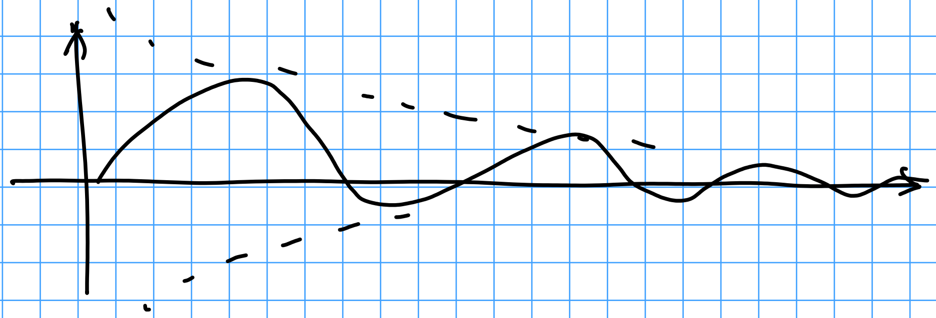
Se cerco le sol. reali trovo: $\quad (a = 0 \quad b = 1)$

$$y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \quad (= A\cos(x - \varphi))$$

- $y'' + y' + y = 0$ $\qquad P(z) = z^2 + z + 1$

RADICI $\quad \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(a = -\dfrac{1}{2} \quad b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$



SUPPONIAMO DI VOLER RISOLVERE

$$\begin{cases} y'' + y' + y = x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

CERCO UNA SOL. PARTICOLARE $\bar{y}(x) = ax + b$

$\Rightarrow \quad \bar{y}'(x) = a \qquad \bar{y}''(x) = 0$. SE IMPONGO L'EQUAZIONE

$$0 + a + ax + b = x \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \qquad a = 1 \quad b = -1$$

dunque $\bar{y}(x) = x - 1$ e le sol. dell'eq. sono

$$e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x - 1$$

. IMPONGO LE COND INIZIALI $\Rightarrow$

$$0 = e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x - 1 \Big|_{x=0} = \lambda - 1$$

$$0 = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{x}{2}}\left(-\lambda\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + 1 \Big|_{x=0} = -\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu+1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = -1+\frac{1}{2} \iff \mu = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

DUNQUE $$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+x-1}$$

NOTA IN $\mathbb{C}$ ogni polinomio ha N radici (contate con la molteplicità)

SE TUTTE LE RADICI DI P SONO SEMPLICI SAPPIAMO COSA FARE

E SE NON SONO TUTTE SEMPLICI ??

SUPPONIAMO ORA CHE $P(z) = (z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k}$

dove $m_1+\dots+m_k = N$ (m_i è la molteplicità della radice z_i)

$\Rightarrow$ sappiamo che $e^{z_1 x} \dots e^{z_k x}$ sono soluzioni (indipendenti) di (E_0)

MA se $K < N$ queste soluzioni **NON** BASTANO a generare tutte le soluzioni. Infatti sia una di queste radici, la chiamo z_0 di molteplicità $m \leq N$. $\Rightarrow$ $P(z) = (z - z_0)^m \, P_1(z)$ $\quad P_1(z_0) \neq 0$

(se $m = 1$ $\quad Q(x) = $ costante)

SI VEDE CHE (ci fidiamo!!)

$$y(x) = Q(x)\, e^{z_0 x} \quad \text{è soluzione di } (E_0)$$

per ogni polinomio Q di grado $\leq m-1$

Ad esempio se $m = 2$ ho $y(x) = \underbrace{Q(x)\, e^{z_0 x}}$

con grado $Q = 1$ cioè $Q(x) = ax + b$

$$y'(x) = Q'(x)\, e^{z_0 x} + \underbrace{Q(x)\, z_0\, e^{z_0 x}}$$

$$y''(x) = \cancel{Q''(x)}\, e^{z_0 x} + 2\, Q'(x)\, z_0\, e^{z_0 x} + \underbrace{z_0^2\, Q(x)\, e^{z_0 x}}$$

$$y'''(x) = 2\, Q'(x)\, z_0^2\, e^{z_0 x} + z_0^2\, Q'(x)\, e^{z_0 x} + \underbrace{z_0^3\, Q(x)\, e^{z_0 x}} =$$

$$\left(3\, Q'(x)\, z_0^2 + \underbrace{z_0^3\, Q(x)}\right) e^{z_0 x}$$

$\vdots$

$$y^{(N)}(x) = N\, Q'(x)\, z_0^{N-1}\, e^{z_0 x} + Q(x)\, z_0\, e^{z_0 x}$$

$\Rightarrow \quad a_N y^{(N)} + \dots + a_0 y = Q'(x)\, P'(z_0)\, e^{z_0 x} + Q(x)\, P(z_0)\, e^{z_0 x}$

$$\left(N z_0^{N-1} + (N-1) z_0^{N-2} + \dots \right)$$

IN GENERALE VIENE

$$e^{z_0 x} \left(Q(x)\, P(z_0) + Q'(x)\, P'(z_0) + Q''(x)\, P''(z_0) + \dots Q^{(m-1)}(x)\, P^{(m-1)}(z) \right)$$

DIRE CHE z_0 è radice di molteplicità m $\Longleftrightarrow$

$0 = P(z_0) = P'(z_0) = \dots = P^{(m-1)}(z_0)$

$\Rightarrow$ $\underline{Q(x)\, e^{z_0 x} \quad \text{è SOLUZIONE}}$

DUNQUE TROVO SOL. DEL TIPO

$$e^{z_0 x}, \quad x\, e^{z_0 x}, \quad x^2 e^{z_0 x} \quad \dots \quad x^{m-1} e^{z_0 x}$$

CHE SI VEDONO ESSERE TUTTE LIN. INDIPENDENTI

SE z_0 È RADICE DI $P(z)$ con molteplicità m

$\Rightarrow$ TROVO m sol. di (E_0) LIN. IND definite da

$$e^{z_0 x}, \; x e^{z_0 x}, \; \dots, \; x^{m-1} e^{z_0 x}$$

Si vede anche che l'insieme delle soluzioni fornite in questo modo, al variare di tutte le radici, produce N soluzioni linearmente indipendenti $\Rightarrow$ HO TROVATO QUELLO CHE CERCAVO

ESEMPIO

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$ radice -1 con molteplicità 2

$\Rightarrow$ le soluzioni sono $\lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} = e^{-x}(\lambda + \mu x)$

ESEMPIO

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

$$P(z) = (z+1)^2 z$$ radici $z = 0$, $z = -1$ DOPPIA

$\Rightarrow$ SOL. $y(x) = \lambda_1 e^{0 \cdot x} + \lambda_2 e^{-x} + \lambda_3 x e^{-x}$

$= \lambda_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 x) e^{-x}$