Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

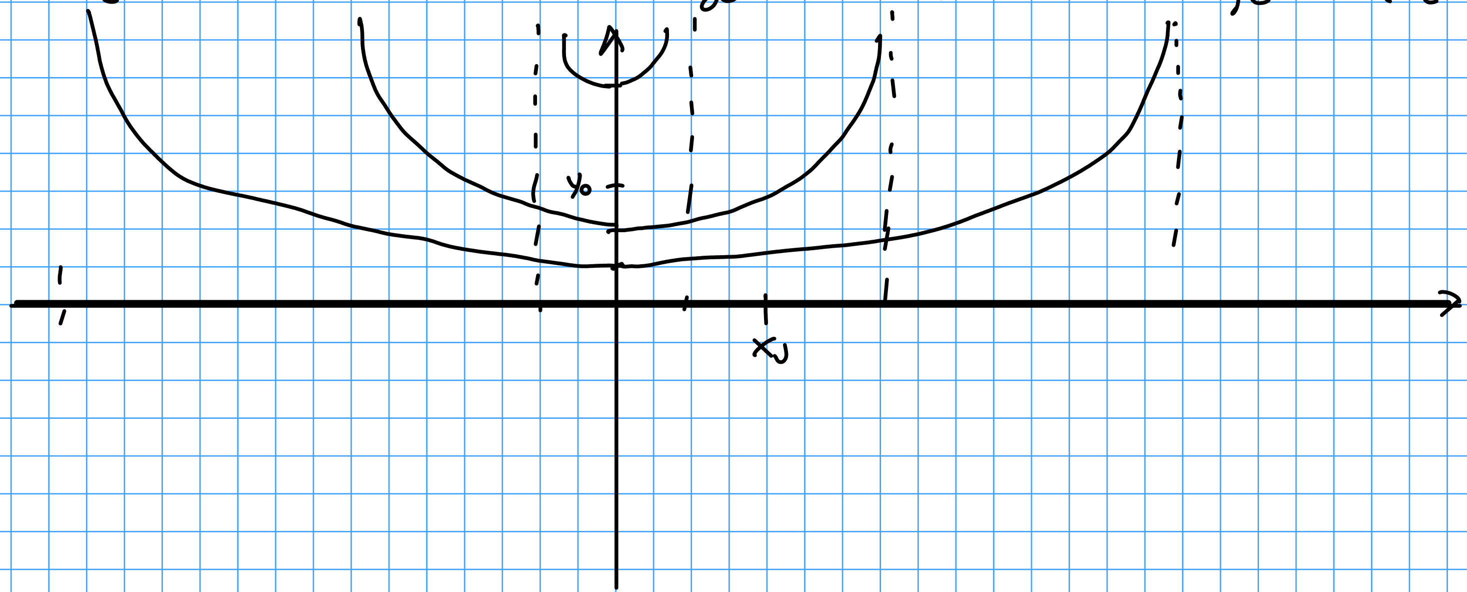
Trentasettesima lezione, 4 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

- PROSSIMI VENERDÌ ORARIO 14.30 - 17.30

RIPRENDIAMO L'ES. $y' = y^2 x$. $y(x_0) = y_0$

GIÀ VISTO IL CASO $y_0 > 0$ (NOTA: se $y_0 = 0$ c'è la sol. $y(x) = 0 \ \forall x$)



CASO $y_0 < 0$ stesso procedimento

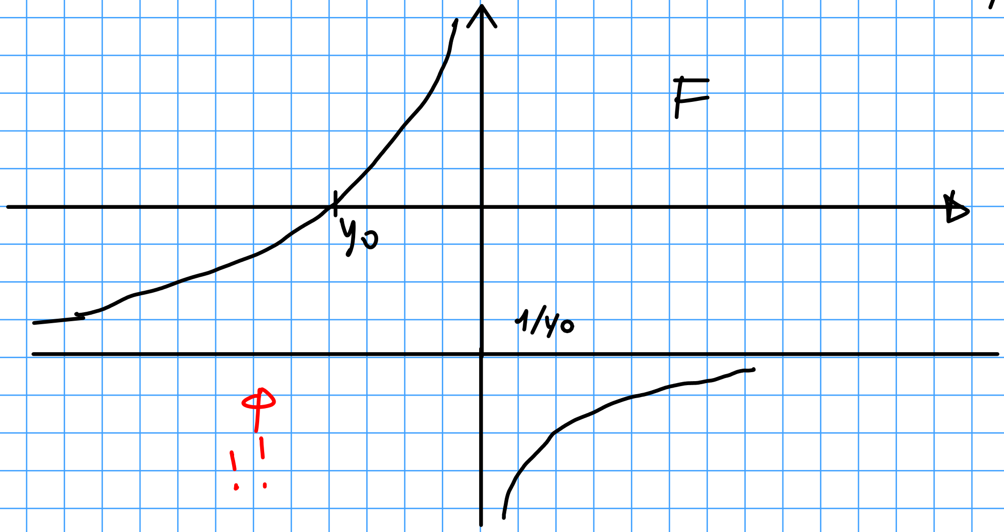
$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s^2} = \int_{x_0}^{x} t \, dt \quad \left(= \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right)$$

$$\Vert$$

$$\left[-\frac{1}{s} \right]_{y_0}^{y(x)} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)}$$

+ per x vicino a x_0 e fino quando la formula ha senso

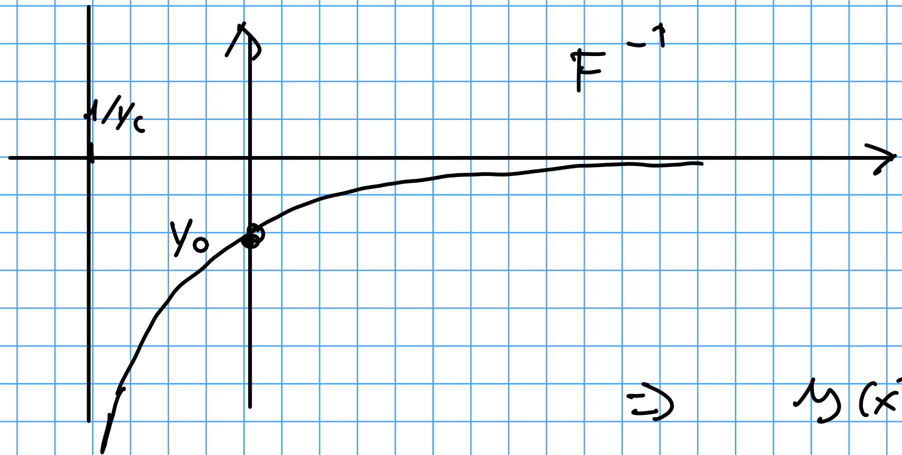
Facciamo il grafico di $\frac{1}{y_0} - \frac{1}{s}$ $(y_0 < 0)$



MI INTERESSA LA RESTRIZIONE SU $]-\infty, 0[$

$F(s) = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{s}$ per $s < 0$

L'inverso di F è dato da



$\frac{1}{y_0} - \frac{1}{s} = z$ $\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{y_0} - z.$

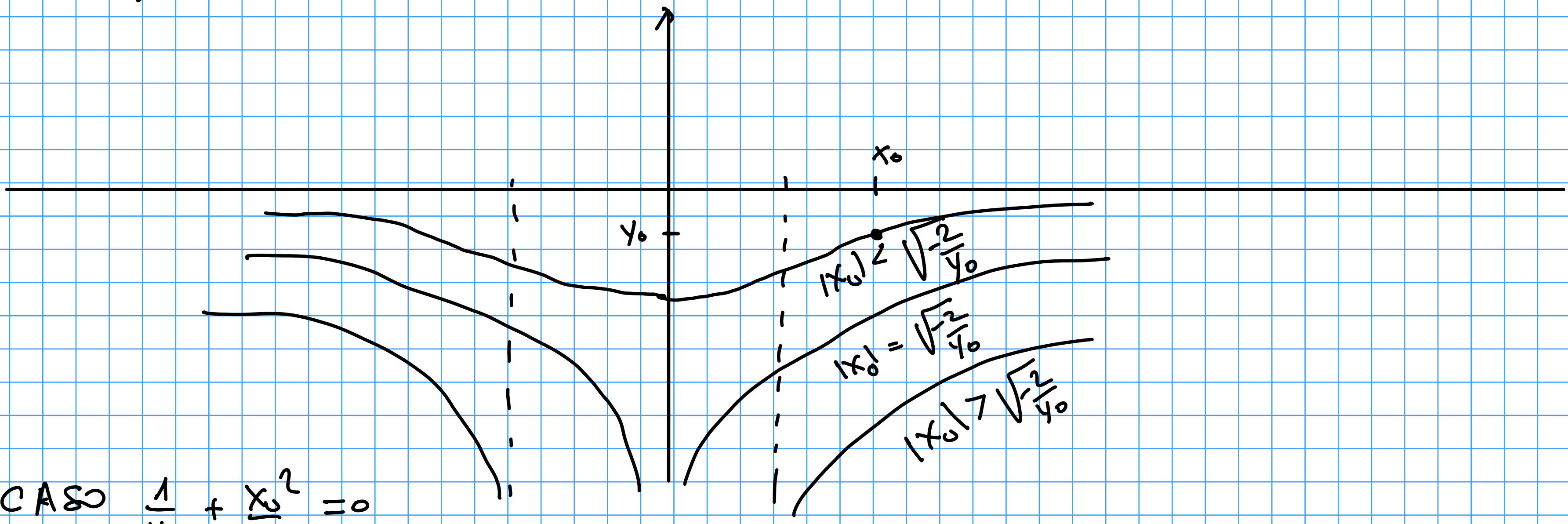
$$s = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - z} = \frac{y_0}{1 - y_0 z}$$

$\Rightarrow$ $y(x) = F^{-1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right)$ per x tali da

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} > \frac{1}{y_0} \iff x^2 > \frac{1}{y_0} + \frac{x_0^2}{2}$$

CASO $\frac{1}{y_0} + \frac{x_0^2}{2} < 0$ ($x_0^2 < -\frac{2}{y_0} \iff |x_0| < \sqrt{-\frac{2}{y_0}}$ ~ x_0 piccolo)

$y(x)$ è definita $\forall x$



CASO $\frac{1}{y_0} + \frac{x_0^2}{2} = 0$

$y(x)$ è definita se $x \neq 0$

CASO $\frac{1}{y_0} + \frac{x_0^2}{2} > 0 \Rightarrow y(x)$ è definita per $|x| > \sqrt{\frac{1}{y_0} + \frac{x_0^2}{2}}$

NOTA OGNI coppia (x_0, y_0) individua una curva.

OVVIAMENTE NON VALE IL VICEVERSA - data una $y(x)$ la individuo con x_0 $y(x_0)$ SE $x_0 \in$ DOMINIO (y)

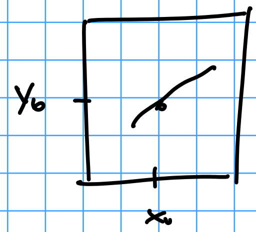
PERÒ NON BASTA FISSARE x_0 e far variare y_0: PERDEREI LE CURVE CHE NON SONO DEFINITE IN x_0.

RITORNIAMO ALL' EQ. GENERICA

$$\begin{cases} y' = A(y)\,B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$A : J \to \mathbb{R}$
$B : I \to \mathbb{R}$ CONTINUE $y_0 \in J$, $x_0 \in I$

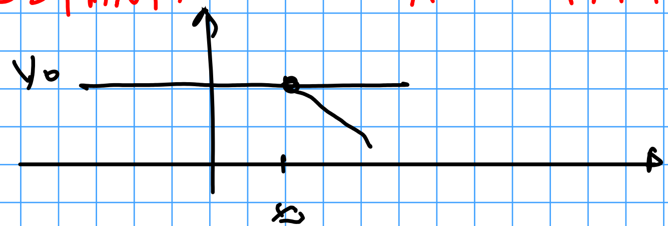
ABBIAMO VISTO:



(1) se $A(y_0) = 0 \Rightarrow$
$y(x) = y_0$ è soluzione

(2) se $A(y_0) \neq 0 \Rightarrow$ per x vicino a x_0 ESISTE UNICA y soluzione

NON POSSO PERÒ ESCLUDERE CHE ESISTANO SOLUZIONI NON COSTANTI A PARTIRE DA $y(x_0) = y_0$ se $A(y_0) = 0$



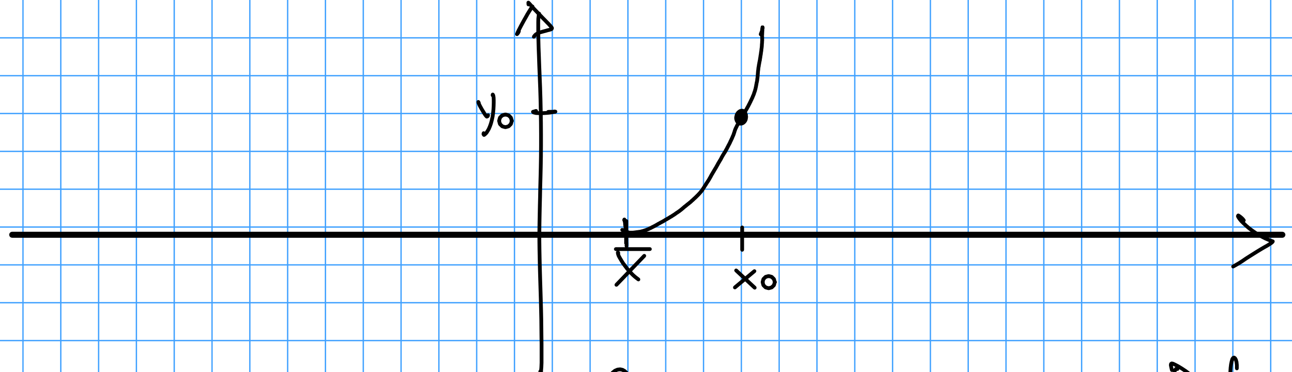
$A(y_0) = 0$

ESEMPIO

$$y' = \sqrt{y}$$

$A(y) = \sqrt{y}$ per $y \geq 0$ $(J = [0, +\infty[)$

$B(x) = 1$ $I = \mathbb{R}$



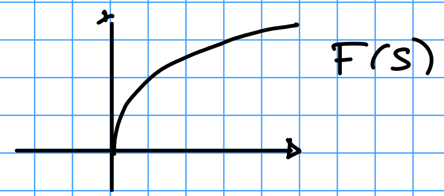
(1) $y(x) = 0$ è soluzione   Dato che $A(0) = \sqrt{0} = 0$

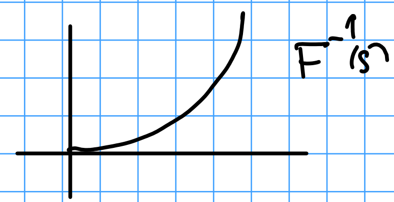
(2) Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 > 0$. Cerco la sol. con $y(x_0) = y_0$

Soliti calcoli:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = x - x_0 \iff 2\sqrt{y(x)} - 2\sqrt{y_0} = x - x_0$$

(fino a che la relazione ha senso!)





$$\iff \sqrt{y(x)} = \sqrt{y_0} + \frac{(x - x_0)}{2}$$

se $x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0}$

$$\iff y(x) = \left(\frac{x - x_0 + 2\sqrt{y_0}}{2}\right)^2$$

per $x > \frac{x_0 - 2\sqrt{y_0}}{2} = \bar{x}$

$\Downarrow$

PARABOLA CHE PASSA PER (x_0, y_0) e ha VERTICE IN $(\bar{x}, 0)$

DATO CHE IN $x = \bar{x}$ $\underline{\underline{y' = 0}}$ POSSO DEFINIRE

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & \text{se } x \geq \bar{x} \\ 0 & \text{se } x < \bar{x} \end{cases}$$

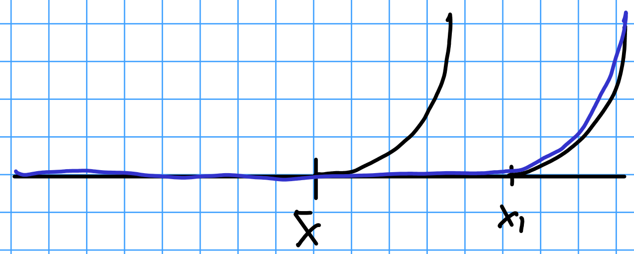
$\tilde{y}$ è DERIVABILE e <u>RISOLVE</u> L'EQUAZIONE

<u>DUNQUE</u> DA $(\bar{x}, 0)$ PARTONO <u>DUE</u> SOLUZIONI

(LA COSTANTE e LA $y(x)$)

Se parto da $\bar{x}$ allora $\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right)^2$ è sol per $x \geq \bar{x}$

IN REALTÀ DA $(\bar{x}, 0)$ PARTONO INFINITE SOLUZIONI



Se prendo $x_1 > \bar{x}$ posso "staccarmi da zero" in x_1

e così trovo un'altra sol. che in $\bar{x}$ vale 0 !!

$\Rightarrow$ INFINITE sol. CON $y(\bar{x}) = 0$

QUESTO (ULTIMO) FENOMENO DI NON UNICITÀ DIPENDE DAL FATTO CHE LA FUNZIONE $A(y) = \sqrt{y}$ NON È DERIVABILE IN $y=0$.

[SI PUÒ VEDERE CHE SE $A(y_0)=0$ A è derivabile in y_0 $\Rightarrow$ l'unica soluzione con $y(x_0)=y_0$ è $y(x)=y_0$]

Si vede esaminando la formula che $\frac{1}{A(y)}$ NON È INTEGRABILE VICINO a y_0 $\Rightarrow$ NON POSSO ARRIVARE ALLA SOL. COSTANTE PARTENDO DA $y_1>0$ - mi serve tempo infinito.

IN PARTICOLARE SE $\exists A'(y_0) \Rightarrow A(y) \simeq A'(y_0)(y-y_0)$ $\forall y \sim y_0$

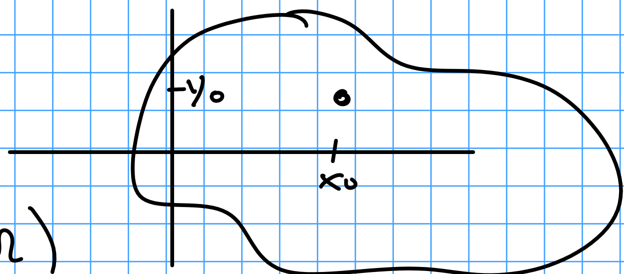
$$\Rightarrow \frac{1}{A(y)} \simeq \frac{1}{A'(y_0)} \frac{1}{y-y_0}$$ NON INTEGRABILE

TEOREMA (GENERALE sulle eq. del I° ordine - in forma normale) (DI CAUCHY)

(NO DIM.)

Ω "DOMINIO" IN $\mathbb{R}^2$ (aperto)

$F : \Omega \to \mathbb{R}$ $(F(x,y) \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in \Omega)$



$(x_0, y_0) \in \Omega$ MI INTERESSA IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$(P)\ \begin{cases} y' = F(x, y(x)) & \leftarrow \text{EQUAZIONE} \\ y(x_0) = y_0 & \leftarrow \text{COND. INIZIALE} \end{cases}$$

questa formulazione contiene ora le lineari che le eq. var. sep.

$F(x,y) = a(x)\, y + b(x)$

$F(x,y) = A(y)\, B(x)$

IPOTESI
- $F(x,y)$ CONTINUA IN (x,y)
- [F è LIPSCHITZIANA IN y, UNIFORMEMENTE RISPETTO A x:
  ESISTE $L > 0$ tale che $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L\, |y_1 - y_2|$]

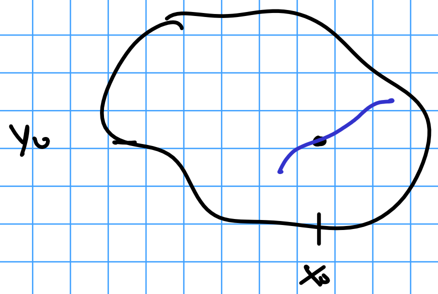
TESI

ESISTE UNA E UNA SOLA SOL. DI (P), DEFINITA PER x VICINO A x_0. FORMALMENTE:

$\exists\ \delta > 0$ T.C. (a) $\exists\ y : \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ (conta che Ω è "aperto", NON CONTIENE IL SUO CONTORNO)

tale che
- y è derivabile
- $(x, y(x)) \in \Omega$ per $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
- $y'(x) = F(x, y(x))$ per $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
- $y(x_0) = y_0$

(b) INOLTRE $y(x)$ È UNICA TRA TUTTE LE FUNZIONI DEFINITE SU $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$



TEOREMA (esistenza massimale). Data F come sopra.

Dato $(x_0, y_0) \in \Omega$ esistono $-\infty \le a < x_0 < b \le +\infty$ ed esiste

$y :]a, b[\to \mathbb{R}$ tale che y risolve (P)

e succede una delle cose seguenti

(i) $b = +\infty$

(ii) $b < +\infty$ e $\lim_{x \to b^-} |y(x)| = +\infty$

(iii) $b < +\infty$ e $\exists \lim_{x \to b^-} (x, y(x)) \in$ CONTORNO DI Ω

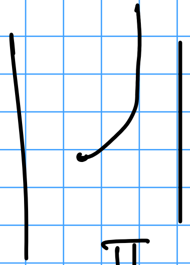
Analogamente

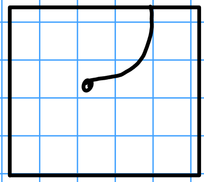
(i) $a = -\infty$

(ii) $a > -\infty$ e $\lim_{x \to a^+} |y(x)| = +\infty$

(iii) $a > -\infty$

e $\exists \lim_{x \to a^+} (x, y(x)) \in$ CONTORNO DI Ω



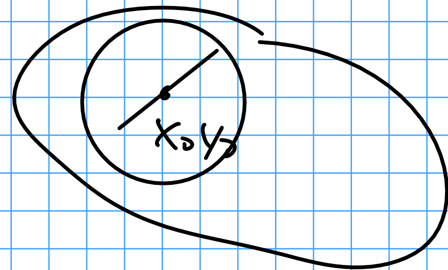


OSS. Se $F(x,y)$ è derivabile in y e

$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$ è continua nelle due variabili

$\Rightarrow$ VALE L'IPOTESI DEL TEOREMA PRECEDENTE

IN UN DISCO DI CENTRO (x_0, y_0)



$\Rightarrow$ esiste la sol. per $x \sim x_0$

DUNQUE

- CASO EQ. LINEARE $F(x,y) = a(x)\, y + b(x)$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = a(x)$ CONTINUA

RIENTRA NEL TEOREMA (MA L'IPOTESI DI LINEARITÀ DICE DI PIÙ SUL TEMPO DI ESISTENZA)

• CASO VAR SEP. $F(x,y) = A(y)\,B(x)$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = A'(y)\,B(x)$$

∃ ESISTE SE A DERIVABILE (OPPURE LIPSCHIANA)

RIENTRA NEL TEOREMA SE A È DERIVABILE

VOGLIO ORA CONSIDERARE EQUAZIONI DI ORDINE ≥ 1

PER ARRIVARCI ENUNCIO (NO DIM.) UN TEOREMA DI CAUCHY PER SISTEMI DI N EQUAZIONI DI ORDINE 1

IL PROBLEMA È QUESTO:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_N(x)) \\ \vdots \\ y_N'(x) = f_N(x, y_1(x), \dots, y_N(x)) \\ y_1(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad y_N(x_0) = y_0^N \end{cases}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$y_0^1 \dots y_0^N \in \mathbb{R}$

POSSIAMO SCRIVERE IL TUTTO PIÙ CONCISAMENTE PONENDO

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_N(x) \end{pmatrix} \qquad Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$$

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1 \dots y_N) \\ \vdots \\ f_N(x, y_1 \dots y_N) \end{pmatrix} \quad \text{DOVE} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e l'eq. diventa

$$(S) \begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{dove} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ y_0^N \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Sia Ω un dominio in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tale che

- $F(x, Y)$ è continua
- $\| F(x, Y_1) - F(x, Y_2) \|_{\mathbb{R}^N} \leq L \| Y_1 - Y_2 \|$ $\quad \forall (x, Y_1)\ (x, Y_2) \in \Omega$

$\Rightarrow$ Esiste unica $Y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, δ piccolo, sol di (S)

CONSIDERIAMO ORA L'EQ. LINEARE DI ORDINE N, IN FORMA NORMALE

$$(P.N)\begin{cases} y^{(N)}(x) + a_{N-1}(x)\, y^{(N-1)}(x) + \dots + a_0(x)\, y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1 \; \dots \; y^{(N-1)}(x_0) = y_{N-1} \end{cases}$$

DOVE $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, b : I \to \mathbb{R}$ continue, I intervallo

FATTO: ESISTE, UNICA, $y :]x_0-\delta, x_0+\delta[\to \mathbb{R}$, ($\delta$ piccolo) sol di $(P.N)$

DIM. PONGO
$$V_0(x) = y(x)$$
$$V_1(x) = y'(x)$$
$$\vdots$$
$$V_{N-1}(x) = y^{(N-1)}(x)$$
$$V(x) = \begin{pmatrix} V_0(x) \\ \vdots \\ V_{N-1}(x) \end{pmatrix}$$

IL PROBLEMA $(P.N)$ EQUIVALE AL SISTEMA DI ORDINE 1

$$(S)\begin{cases} V_0' = V_1 \\ V_1' = V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1}' = b(x) - a_{N-1}V_{N-1} - a_{N-2}V_{N-2} - \dots - a_0 V_0 \end{cases}$$

$$+ \; V(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{N-1} \end{pmatrix} =: V_0$$

CIOÈ $\begin{cases} V' = F(x, V) \\ V(x_0) = V_0 \end{cases}$ dove $F(x, y_0 \dots y_{N-1}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ b(x) - a_{N-1} y_{N-1} - \end{pmatrix}$

È FACILE VEDERE CHE F è LIPSCHITZIANA (perché l'eq. è lineare) $\Rightarrow$

VALE IL TEOREMA DI CAUCHY PER I SISTEMI $\Longrightarrow$ TESI

Si potrebbe applicare il teorema anche ai sistemi di eq. lineari

$$Y'(x) = A(x) Y(x) + B(x) \quad + \quad Y(x_0) = Y_0$$

dove $A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1N}(x) \\ \vdots & & \\ a_{N1}(x) & \dots & a_{NN}(x) \end{pmatrix}$ $\quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{pmatrix}$

ottenendo gli stessi risultati

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x) y_1(x) + \dots + a_{1N}(x) y_N(x) + b_1(x) \\ \vdots \\ y_N'(x) = a_{N1}(x) y_1(x) + \dots + a_{NN}(x) y_N(x) + b_N(x) \end{cases} + \quad \begin{matrix} y_1(x_0) = y_1^0 \\ \vdots \\ y_N(x_0) = y_N^0 \end{matrix}$$