Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentaseiesima lezione, 28 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

DA CAPO...

$$y' = \frac{3y}{x} - \frac{24}{1+x^2} \qquad \text{su } \{x>0\}$$

$x_0 = 1$

$$a(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow A(x) = \int_1^x \frac{3}{t}\,dt = 3\ln t \Big|_1^x = 3\ln x = \ln(x^3)$$

$y(1)$

$$b(x) = -\frac{24}{1+x^2} \qquad \text{e quindi}$$

$$y(x) = x^3\left\{ y(1) - \int_1^x \frac{24}{1+t^2}\frac{1}{t^3}\,dt \right\}$$

FACCIO L'INTEGRALE

$$\int_1^x \frac{24}{1+t^2}\frac{t}{t^4}\,dt = \qquad s = t^2 \qquad ds = 2t\,dt \qquad \left(t = \sqrt{s} \qquad dt = \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds \right)$$

$$\int_1^{x^2} \frac{12\,ds}{(1+s)s^2} = \qquad \frac{12}{(1+s)s^2} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} = \frac{As^2 + B(1+s)s + C(1+s)}{(1+s)s^2}$$

$$12\int_1^{x^2}\left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)ds \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ C = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 12 \\ B = -12 \\ C = 12 \end{cases}$$

$$= 12\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\Big|_1^{x^2} - \frac{12}{s}\Big|_1^{x^2} =$$

$$12\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)-\frac{12}{x^2}-12\ln(2)+12 \implies$$

$$y(x) = x^3\left\{y(1)+12(\ln(2)-1)-12\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+\frac{12}{x^2}\right\} = \quad \text{per } x>0$$

$$x^3\left\{c-12\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+\frac{12}{x^2}\right\}$$

$$\boxed{c := y(1)+12(\ln(2)-1)}$$

$$c\,x^3-12x^3\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+12x$$

$$= x\left\{cx^2-12x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)+12\right\}$$

Studiamo le sol. al variare di c (al variare di $y(1)$)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = -12\lim_{x\to 0^+} x^3\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = 0 \quad (0^+)$$ (vince x^3, il $\ln$ determina il segno)

$$\lim_{x\to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & c>0 \\ 0^+ & c=0 \\ -\infty & c<0 \end{cases}$$

CASO $c=0$

$$12\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \quad \left(\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)$$

$$12\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^3\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]\right) =$$

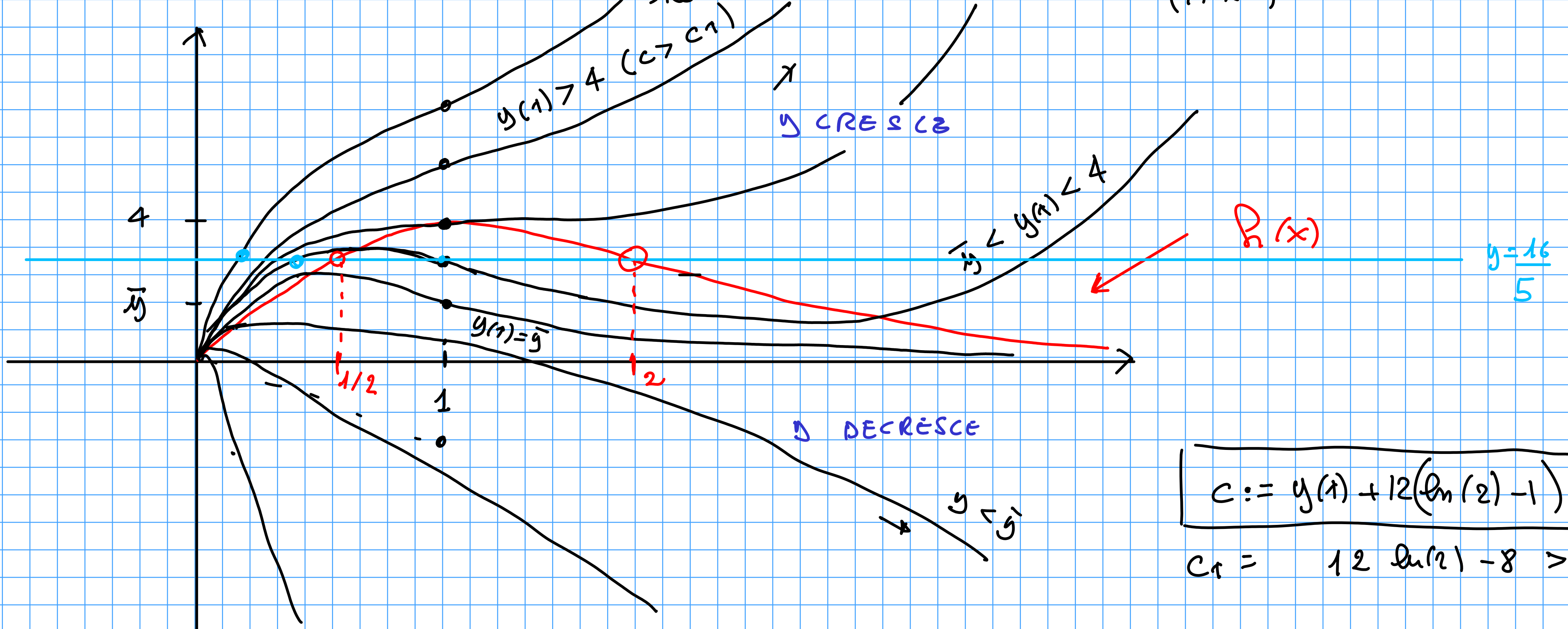
$$12 \lim_{x \to +\infty} \left(x - x + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0^+$$

MONOTONIA Usiamo il "secondo metodo" cercando il segno di

$$F(x,y) = \frac{3y}{x} - \frac{24}{1+x^2} \; ; \; \text{su } \{(x,y) : x>0\}$$

$F(x,y) \geq 0 \iff y > \frac{8x}{1+x^2}$. Se chiamo $h(x) := \frac{8x}{1+x^2}$

trovo $h(0)=0$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, $h'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot 8$, $h(1) = 4$



$$\boxed{c := y(1) + 12(\ln(2) - 1)}$$

$c_1 = 12\ln(2) - 8 > 0$

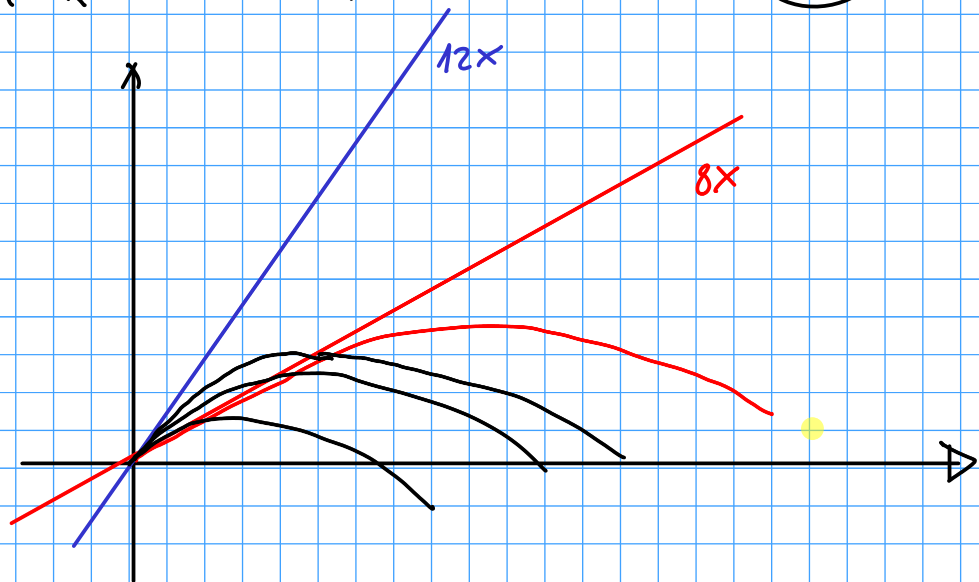
QUAL È LA SOL. CON $c=0$? $\Leftarrow$ $y(1) = 12(1-\ln(2)) = \bar{y}$

POTREMMO CHIEDERCI QUALE SIA $\lim_{x \to 0^+} y'(x) =$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3y(x)}{x} - \frac{24}{1+x^2}\right) = 3\lim_{x\to 0^+} x^2\left(c - \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) + \frac{12}{x^2}\right) - 24$$

$$= 3\lim_{x\to 0^+}\left(cx^2 - x^2\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) + 12\right) - 24 = 12$$

$\Rightarrow$ (VICINO A ZERO)



DOMANDA "ACCESSORIA" QUANTE SOLUZIONI HA L'EQUAZIONE

$$y(x) = \frac{16}{5} \qquad \text{(al variare di } y(1)\text{)}$$

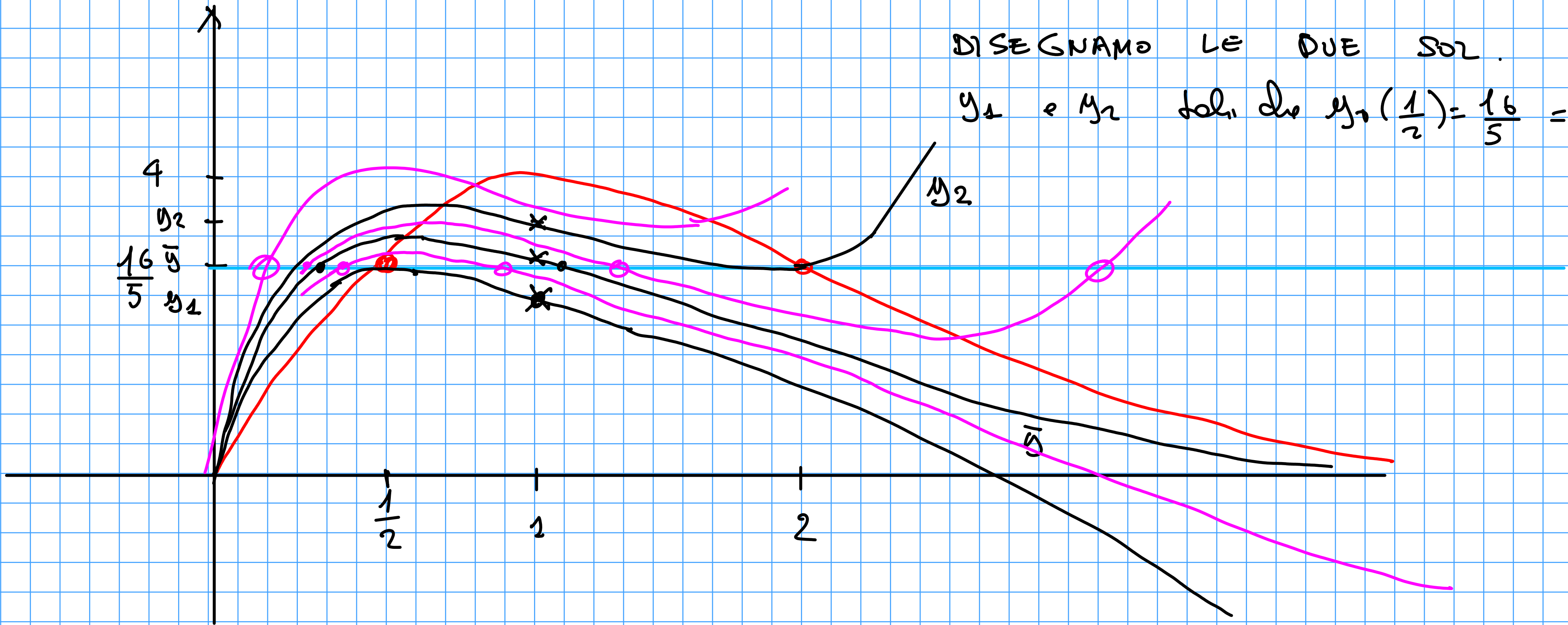
CONVIENE TROVARE LE INTERSEZIONI TRA $y = h(x)$ e $y = \frac{16}{5}$

cioè risolvo $h(x) = \frac{16}{9} \iff \frac{8x}{1+x^2} = \frac{16}{5} \iff 5x = 2 + 2x^2$

$\iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 \qquad x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

DISEGNAMO LE DUE SOL.

y_1 e y_2 tali che $y_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{5} = y_2(2)$



la y_2 è chiara. Per y_1 devo trovare "il suo c"

$$y_1(x) = x^3\left(c_1 - \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + \frac{12}{x^2}\right) \quad \text{e so che } y_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{5} = \frac{1}{8}\left(c_1 - \ln\left(\frac{1/4+1}{1/4}\right) + \frac{12}{1/4}\right) \qquad \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}+1\right)4 = 5$$

$$\frac{16}{5} = \frac{1}{8}\left(c_1 - \ln(5) + 48\right)$$

$$128 = 5c_1 - 5\ln(5) + 240$$

$$5c_1 = 5\ln(5) - 112 < 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y_1(x) = -\infty$$

$$\boxed{c_1 = \ln(5) - \frac{112}{5}} \longrightarrow y(x) \text{ data dalla def. di } c$$

$$\Rightarrow y_1(x) < \bar{y}(x) \quad \text{dove } y_3 \text{ è quella con } c=0$$

$$(y(x) = \bar{y})$$

ALLORA

- Le curve "sopra y_2" incrociano $\frac{16}{5}$ UNA volta (prima di $\frac{1}{2}$) $(y(x) > y_2)$
- La curva y_2 incrocia DUE volte (una prima di $\frac{1}{2}$ e una in $x=2$) $y(x) = y_2$

  "moralmente" $x=2$ è radice doppia

- Le curve tra $\bar{y}$ e $\tilde{y}$ incrociano TRE volte $(x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 2 < x_3)$ ⋮
- La $\bar{y}$ incrocia DUE volte $(x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 2$ — x_3 è andato a $+\infty)$

- Le curve tra y_1 e $\bar{y}$ incrociano **DUE** volte ($x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 2$)
- La y_1 INCROCIA UNA VOLTA IN $x = \frac{1}{2}$ (molteplicità $x=\frac{1}{2}$ è radice doppia)
- Le curve sotto y_1 **NON** incrociano $y = \frac{16}{5}$

Se voglio esprimere il tutto in termini di $y(1)$ devo trovare

$y(1)$ nei tre casi sopra ($y_1(x)$, $\bar{y}(x)$ e $y_2(2)$) ($\bar{y}$ ce l'ho già)

cioè devo ricavare $y(1)$ da c_1 (leggendo la def. di c)

quindi i risultati sopra diventano

$y_2 < y(1) \Rightarrow$ 1 sol.

$y_2 = y(1) \Rightarrow$ 2 sol

$\bar{y} < y(1) < y_2 \Rightarrow$ 3 sol.

$y_1 < y(1) \leq \bar{y} \Rightarrow$ 2 sol.

$y(1) = y_1 \Rightarrow$ 1 sol

$y(x) < y_1 \Rightarrow$ 0 sol.

NOTA

- Nello stesso modo si studia l'eq. per $x<0$ ..
- Avrei potuto scrivere l'eq. sopra nel seguente modo:

$$xy' = 3y - \frac{24x}{1+x^2} \quad \Leftarrow \text{HA SENSO per } x \in \mathbb{R}$$

PERÒ NON È IN FORMA NORMALE $\Rightarrow$ problemi in $x=0$ (dove si annulla il coeff. di y'

NON C'È ESISTENZA se $x_0 = 0$ e $y(x_0) \neq 0$
NON C'È UNICITÀ DA $x_0 = 0$, $y(x_0) = 0$

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

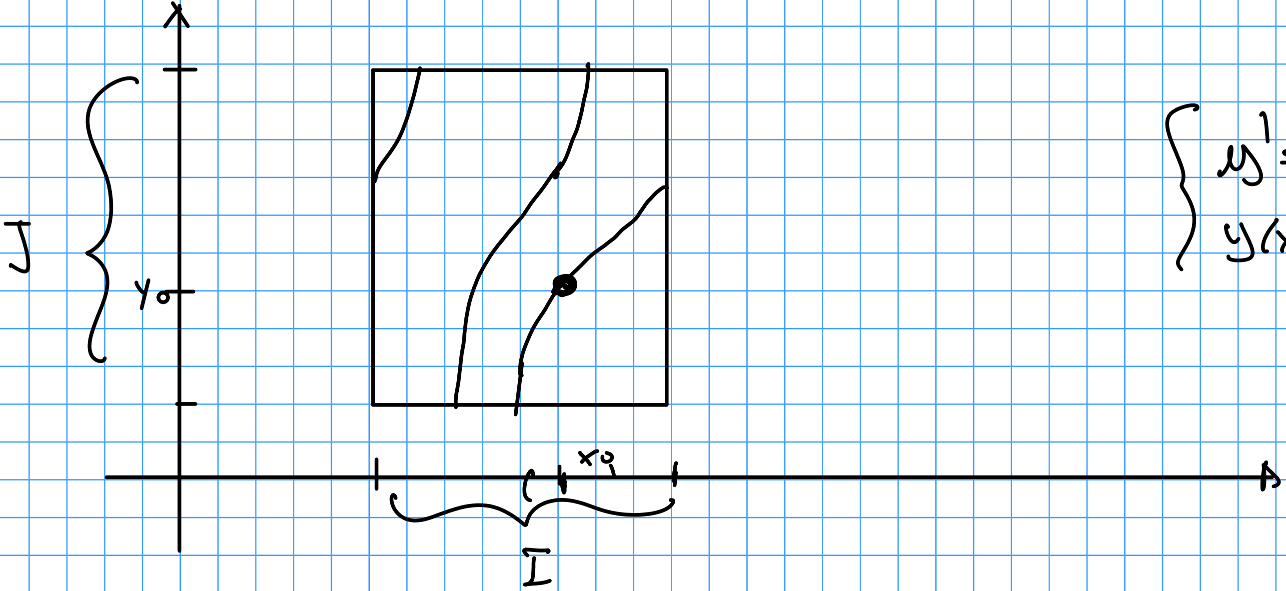
(EVS) $\quad y' = A(y)\,B(x) \qquad y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \in I,\ y_0 \in J$

dove $A : J \to \mathbb{R}$ $\quad B : I \to \mathbb{R}$ $\quad I, J$ intervalli $\quad A, B$ continue

CERCO $I_1 \subset I$ intervallo, $y : I_1 \to J$, y derivabile tale che

$$y'(x) = A(y(x))\,B(x)$$

In questo caso anche il dominio di y è incognito (non è detto che $I_1 = I$)



$$\begin{cases} y' = A(y)\,B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

FATTO Se $A(y_0) = 0 \Rightarrow$ la curva costante $y(x) = y_0$ è soluzione

$$y'(x) = 0 = A(y(x))\,B(x) = A(y_0)\,B(x) = 0 \cdot B(x) = 0$$

PRENDIAMO y_0 tale che $\underline{A(y_0) > 0}$ (discorsi analoghi per $A(y_0) < 0$)

Supponiamo che la soluzione esista vicino x_0 (e vedremo così è fatto)

Dunque suppongo che $y(x)$ esista per $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

(penso a x_0 NON ESTREMO di I) $\Rightarrow$ $y(x)$ è vicina a $y(x_0) = y_0$

per $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e quindi $A(y(x)) > 0$ per tali x

(pur di prendere $\delta > 0$ piccolo). Quindi posso:

$$y'(x) = A(y(x))\, B(x) \qquad x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

$$\Updownarrow \qquad (A(y(x)) \neq 0)$$

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x) \qquad \text{INTEGRO TRA } x_0 \text{ E } x$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{A(y(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt \qquad x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

$$\|$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{A(s)} \qquad \Leftarrow \text{ CAMBIO DI VARIABILE } y(x)=s$$

DUNQUE $\displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{A(s)} = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt \qquad x_0-\delta < x < x_0+\delta$

Se chiamo $\displaystyle F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{A(s)} \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$

Ho $F(y(x)) = G(x)$

Noto che $F'(y) = \dfrac{1}{A(y)} > 0$ per y vicino a $y_0 \Rightarrow F$ è strett. crescente

$\Rightarrow$ F è invertibile $\Rightarrow$

$$y(x) = F^{-1}(G(x)) \quad \text{se } x \sim x_0$$

HO INDIVIDUATO $y(x)$, almeno per x vicino a x_0

Viceversa se $x \sim x_0$ la formula sopra è ben definita e definisce un $y(x)$ che risolve l'eq.

$$y'(x) = \frac{d}{dx} F^{-1}(G(x)) = \left(F^{-1}\right)'(G(x)) \cdot G'(x) =$$

$$\frac{1}{F'(\underbrace{F^{-1}(G(x))}_{y(x)})} \cdot B(x) = \frac{1}{\frac{1}{A(y(x))}} B(x) = A(y(x))\, B(x)$$

QUINDI se $A(y_0) > 0$ ESISTE UNICA LA SOL DI (EVS), per $x \sim x_0$, data dalla formula sopra.

PROBLEMA: quanto posso prendere x lontano da x_0 continuando a trovare la sol.

INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA ??

$\Rightarrow$ fino a quando $A(y(x))$ rimane > 0 !!

DUNQUE PER RISOLVERE L'EQ. DEVO. CONSIDERARE

- $$G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt \qquad G : I \to \mathbb{R}$$

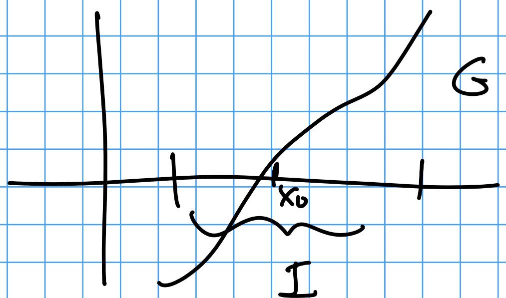
- $$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{A(s)}\,ds \qquad F : J_1 \to \mathbb{R} \quad \text{dove}$$

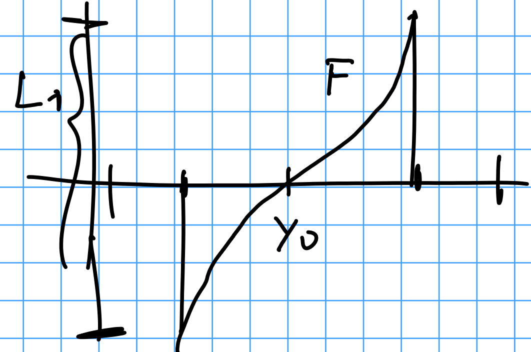
J_1 è il più grosso sottointervallo di J con $y_0 \in J_1$ e $A(y) > 0$ per $y \in J_1$

(Se J_1 ha estremi $a < b$ allora o $a = -\infty$ o $A(a) = 0$
o $b = +\infty$ o $A(b) = 0$)

- $$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

$$\underbrace{\text{per le } x \text{ tali che } G(x) \in F(J_1)}_{I_1 = \text{intervallo di esistenza di } y(x)}$$



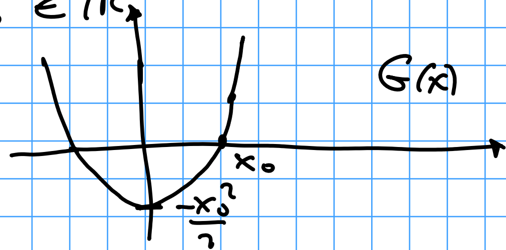


ESEMPIO

$$y' = y^2 x \qquad A(y) = y^2 \qquad J = \mathbb{R}$$
$$B(x) = x \qquad I = \mathbb{R}$$

- ZERI DI A : $y_0 = 0$ annulla $A \Rightarrow y(x) = 0$ è sol, $x \in \mathbb{R}$

- $y_0 > 0 \quad (\Rightarrow A(y_0) > 0)$ e ad $x_0 \in \mathbb{R}$

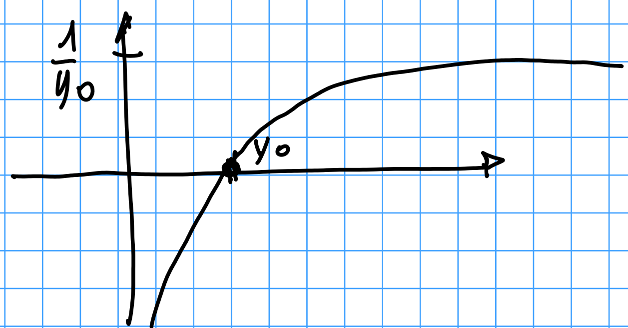


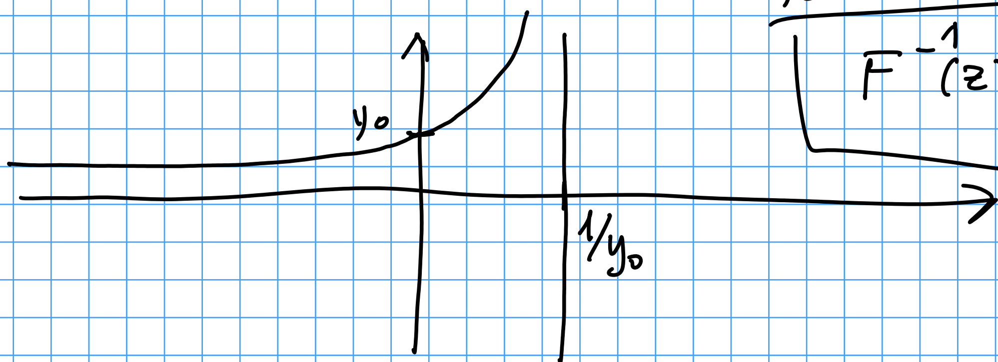
$$G(x) = \int_{x_0}^{x} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s^2}\,ds \quad (\text{per } \underline{\underline{y>0}}) = -\frac{1}{s}\Big|_{y_0}^{y} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}$$

qual è l'immagine $F(]0,+\infty[) =]-\infty, \frac{1}{y_0}[$

$$\boxed{F^{-1}(z) = \frac{y_0}{1 - z y_0}}$$





$$\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} = z \iff \frac{1}{y_0} - z = \frac{1}{y} \iff y = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - z} \right.$$

$$\left. y = \frac{y_0}{1 - z y_0} \right)$$

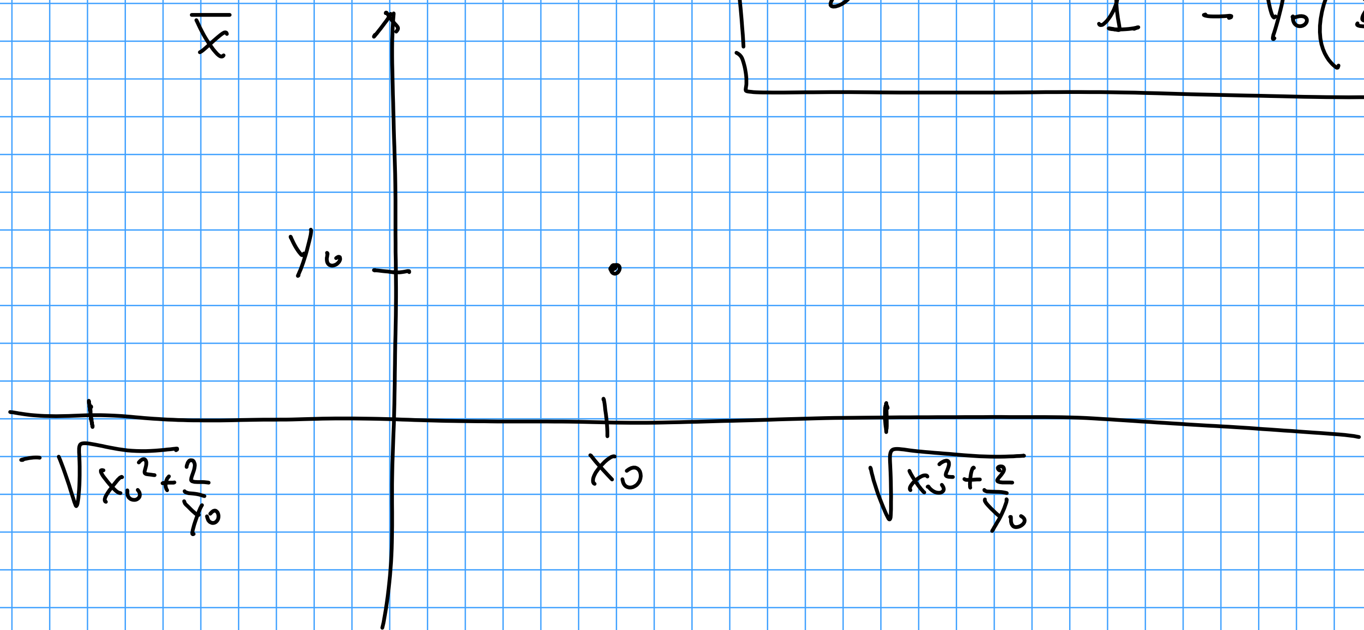
$\Rightarrow$ $y(x)$ è definita per le x tali che $G(x) < \frac{1}{y_0}$

cioè $\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} < \frac{1}{y_0} \iff \frac{x^2}{2} < \frac{x_0^2}{2} + \frac{1}{y_0} \iff x^2 < x_0^2 + \frac{2}{y_0}$

$$\boxed{-\sqrt{x_0^2 + \frac{2}{y_0}} < x < \sqrt{x_0^2 + \frac{2}{y_0}}}$$, e $y(x) = F^{-1}(G(x))$ cioè

$\bar{x}$

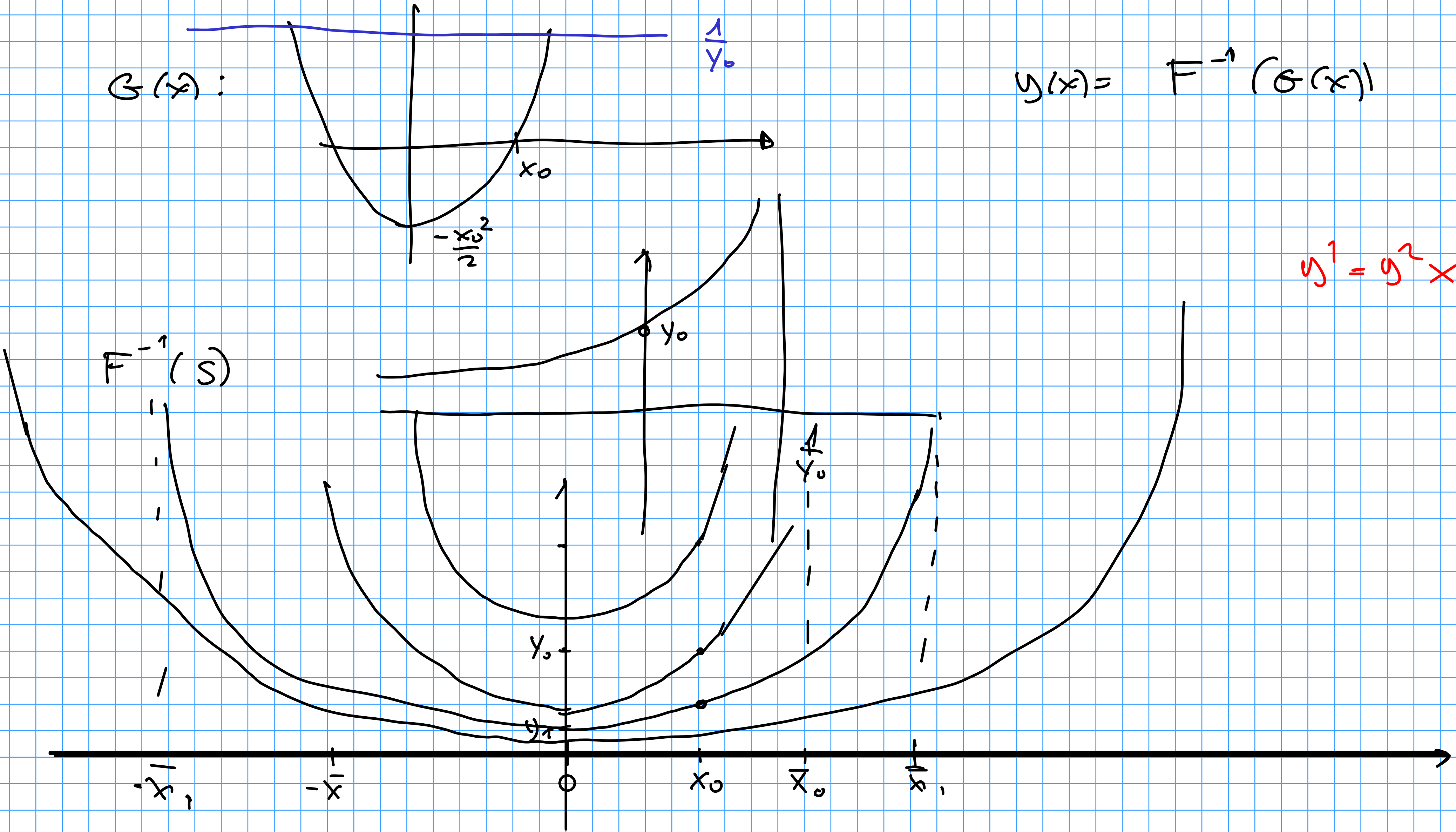
$$\boxed{y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right)}}$$



$G(x)$:

$y(x) = F^{-1}(G(x))$

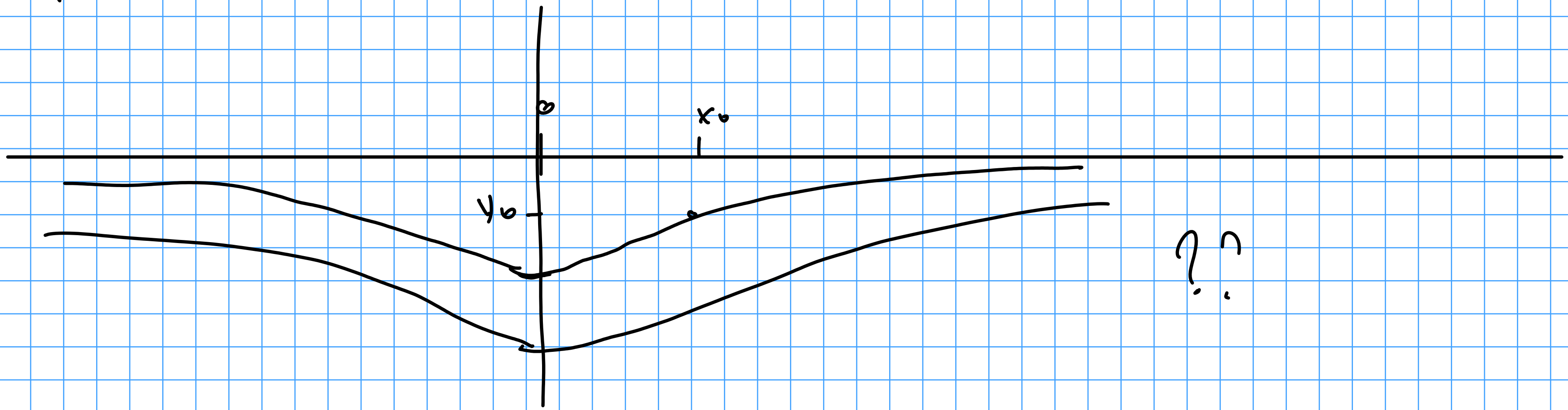
$y' = y^2 x$



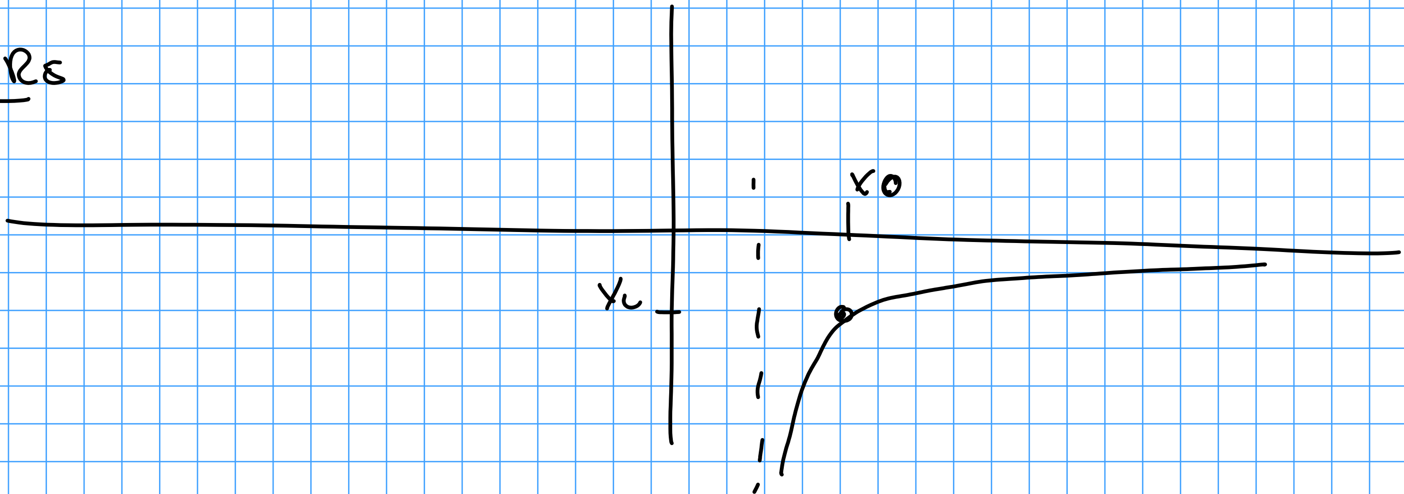
TUTTE QUESTE CURVE (con $y_0 > 0$) "ESPLODONO" PER $x \to \sqrt{x_0^2 + \frac{2}{y_0}}$

(che $\to +\infty$ quando $y_0 \to 0^+$)

se parto da $y_0 < 0$ mi aspetto:



<u>OPPURE</u>



LO VEDIAMO LA PROSSIMA VOLTA ...