Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentacinquesima lezione, 27 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Eq. diff. lineare del I° ordine:

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

Per questi argomenti vedere le lezioni e lo moto presente sul sito (VECCHIE LEZIONI E ... , del 2007)

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono continue, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

La sol. $y(x)$ esiste su tutto I ($y : I \to \mathbb{R}$, derivabile e verifica l'eq.)

ed è data dalla formula:

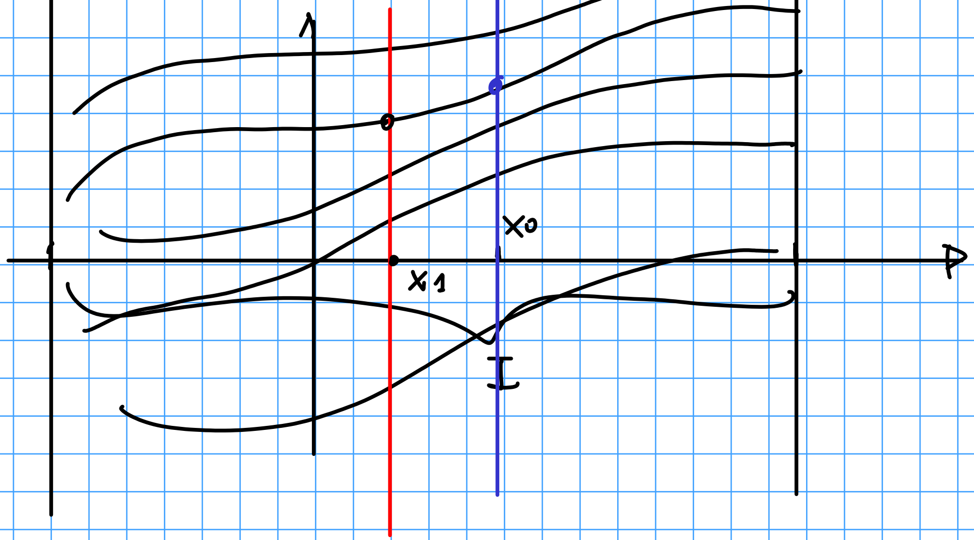
$$y(x) = e^{A(x)} \left\{ y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt \right\}$$

dove · x_0 è un punto prefissato in I

$$\cdot\ A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

Dalla formula si vede che y è UNICA se fisso $y(x_0)$.

$\Rightarrow$ La famiglia delle sol. è una famiglia di curve, definite sull'intervallo I, tale che per ogni (x_0, y_0) con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ per (x_0, y_0) passa una e una sola di queste curve



OSS. (riguardo alla formula) La formula risolutiva individua ogni soluzione mediante il suo valore in x_0 (PREFISSATO).

Se cambio x_0, cambio di conseguenza, il modo di identificare la singola curva, però l'insieme di tutte le sol. è comunque dato da tutti i possibili $y(x_1)$. In effetti $x_1 \neq x_0$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} a(t)\,dt + \underbrace{\int_{x_1}^{x} a(t)\,dt}_{A_1(x)} = A(x_1) + A_1(x)$$

Inoltre

$$y(x) = e^{A(x)} \left\{ y(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\,dt \right\} =$$

$$e^{A(x_1)+A_1(x)}\left\{y(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}e^{-A(t)}b(t)\,dt+\int_{x_1}^{x}e^{-A(t)}dt\,b(t)\,dt\right\}=$$

$$e^{A_1(x)}\left\{\underbrace{e^{A(x_1)}\left[y(x_0)+\int_{x_0}^{x_1}e^{-A(t)}b(t)\,dt\right]}_{y(x_1)}+\int_{x_1}^{x}e^{A(x_1)-A(t)}b(t)\,dt\right\}$$

$$=e^{A_1(x)}\left\{y(x_1)+\int_{x_1}^{x}e^{-A_1(t)}b(t)\,dt\right\}$$

$\uparrow$

$y(x)$ descritta a partire da x_1. Inoltre - se non mi preoccupo di x_0 posso anche scrivere

"
$$y(x)=e^{\int a(x)dx}\int b(x)\,e^{-\int a(x)dx}$$
"

QUESTO VA INTESO:

FISSO $A(x)$ una qualunque primitiva di $a(x)$

FISSO (di conseguenza) una qualunque primitiva di $\int b(x)\,e^{-A(x)}dx$

$\Rightarrow \quad y(x) = e^{A(x)} \left\{ c + B(x) \right\}$ al variare di c in $\mathbb{R}$

C'È UNA SOLA COSTANTE

<u>ESERCIZI</u> (se ne possono trovare altri nei compiti degli anni passati, prima del 2010/11)

(1) $y' = \dfrac{xy}{1+x^2} - 1$

VOGLIO "FARMI UN'IDEA" SU COME SONO FATTE LE SOLUZIONI

$a(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \qquad b(x) = -1$

<u>DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$</u>

($\Rightarrow$ y sarà definita su tutto $\mathbb{R}$)

Posso fissare $x_0 = 0$ e scrivere la formula risolutiva

$$A(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \ln\sqrt{1+t^2}\,\Big|_0^x$$

$$= \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}\left(y(0) + \int_0^x (-1)\, e^{-\ln\left(\sqrt{1+t^2}\right)}\, dt \right) =$$

$$\sqrt{1+x^2}\left(y(0) - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \right) =$$

$$\sqrt{1+x^2}\left(y(0) - \operatorname{arcsinh}(t)\Big|_0^x \right) =$$

$$\boxed{\sqrt{1+x^2}\left(c - \operatorname{arcsinh}(x) \right) \qquad \text{dove } c = y(0)}$$

Come sono messe queste curve !?

Voglio studiare il grafico della y (limiti e monotonia) al variare di c

LIMITI (a $+\infty$ e a $-\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$$

QUALUNQUE SIA c

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$$

MONOTONIA (segno di $y'(x)$) Calcoliamo $y'(x)$

Posso fare direttamente il calcolo:

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(c - \operatorname{arcsinh}(x)\right)$$

$$y'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\left(c - \operatorname{arcsinh}(x)\right) + \sqrt{1+x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(c - \operatorname{arcsinh}(x)\right) - 1 =$$

Si poteva anche mettere l'espressione di $y(x)$ dando $y' = \frac{x}{1+x^2}\,y(x) - 1$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(c - \operatorname{arcsinh}(x) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(c - g(x)\right)$$

dove $\quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \operatorname{arcsinh}(x)$

A questo punto conviene fare il grafico di $g(x)$

STUDIO AUSILIARIO $\quad \cdot \; g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

- $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \qquad \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \to \begin{matrix} +1 & (x \to +\infty) \\ -1 & (x \to -\infty) \end{matrix}\right)$

$\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^-} g(x) = -\infty$

$$\cdot \quad g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$

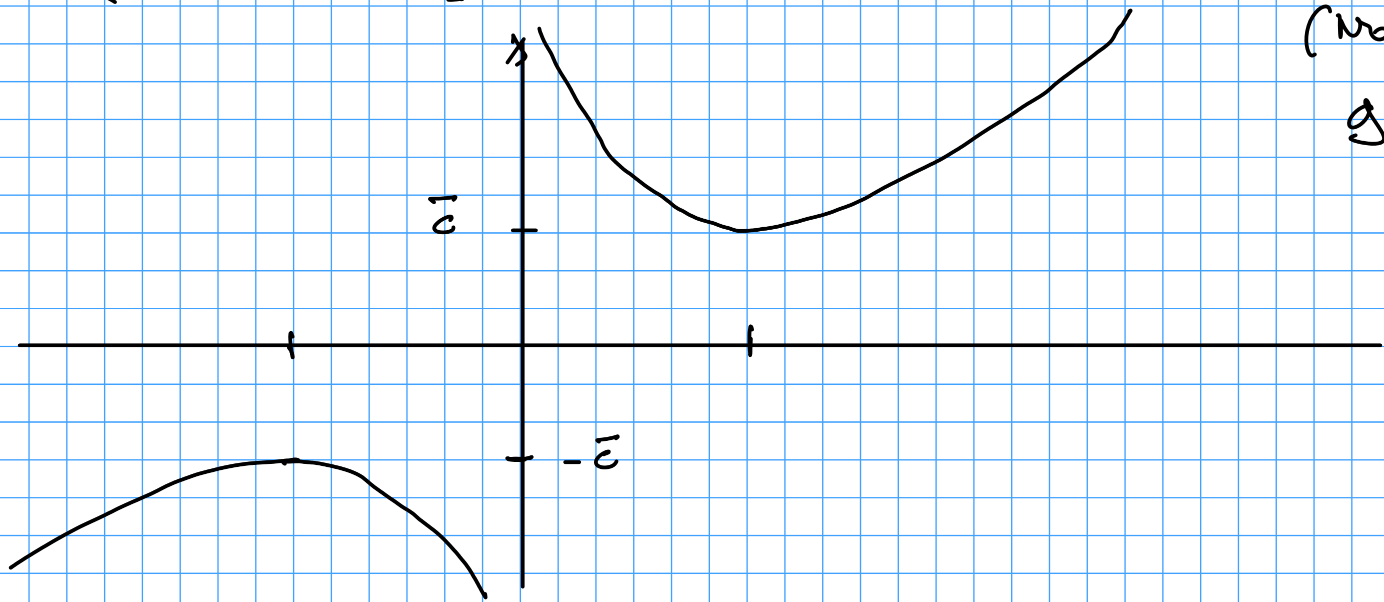
$$\frac{-1 + x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$g'(x) > 0 \iff |x| > 1 \qquad g'(x) < 0 \iff -1 < x < 1$ ($\neq 0$)

$g'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

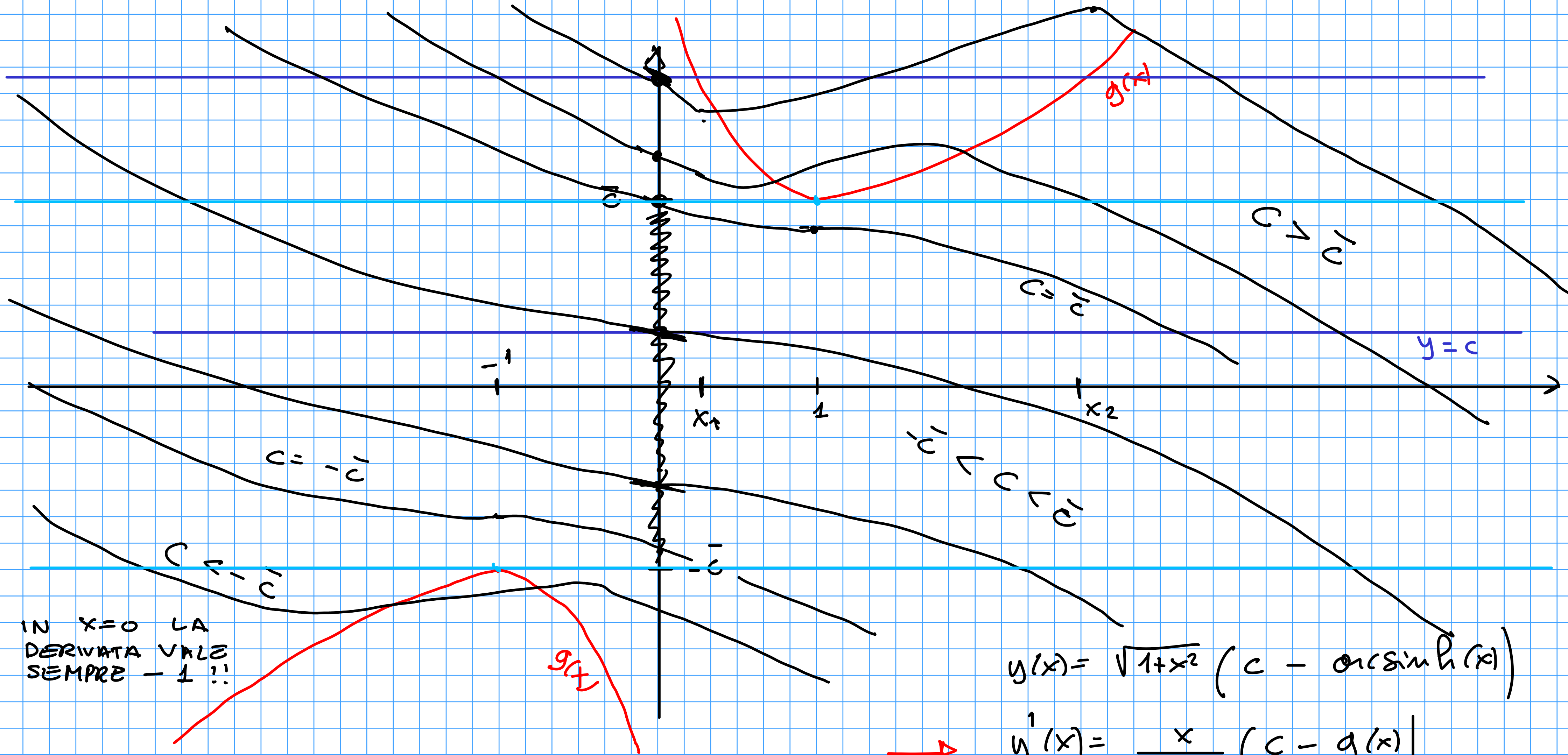
(NOTA CHE g è dispari)

$\Rightarrow$



$$\bar{c} = g(1) = \frac{\sqrt{2}}{1} - \operatorname{arcsinh}(1) > 0$$

COME UTILIZZO IL GRAFICO DI $g(x)$?



IN $x=0$ LA DERIVATA VALE SEMPRE -1 !!

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(c - \operatorname{arcsinh}(x)\right)$$

$$\to \quad y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(c - g(x)\right)$$

$$c = y(0)$$

SE $c > \bar{c}$ $\left(c < -\bar{c} \right)$ nasce una coppia max rel / min rel di ascisse $x_1(c)$ e $x_2(c)$ a livello di 1 " (o di -1)

se $c \to +\infty$ $x_1(c) \to 0^+$ e $x_2(c) \to +\infty$

MODO ALTERNATIVO DI FARE LO STUDIO PRECEDENTE

RICORDO L'EQ. DI PARTENZA

$$y' = \frac{xy}{1+x^2} - 1$$

CHIAMO $F(x,y) := \dfrac{xy}{1+x^2} - 1$ (l'eq. si scrive $y' = F(x,y)$)

CERCO LE ZONE DEL PIANO (x,y) IN CUI $F > 0 \,/\, F < 0 \,/\, F = 0$

DUNQUE STUDIO

$$\frac{xy}{1+x^2} > 1 \iff xy > 1+x^2 \iff \begin{cases} x \neq 0 \quad \text{e} \\ \text{o } x > 0 \quad \text{e} \quad y > \dfrac{1+x^2}{x} \\ \text{o } x < 0 \quad \text{e} \quad y < \dfrac{1+x^2}{x} \end{cases}$$

SI INTRODUCE LA FUNZIONE AUSILIARIA $h(x) := \frac{1}{x} + x$

SI HA

$$F(x,y) > 0 \iff \begin{cases} x \neq 0, \\ y > h(x) \text{ per } x > 0, \quad y < h(x) \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

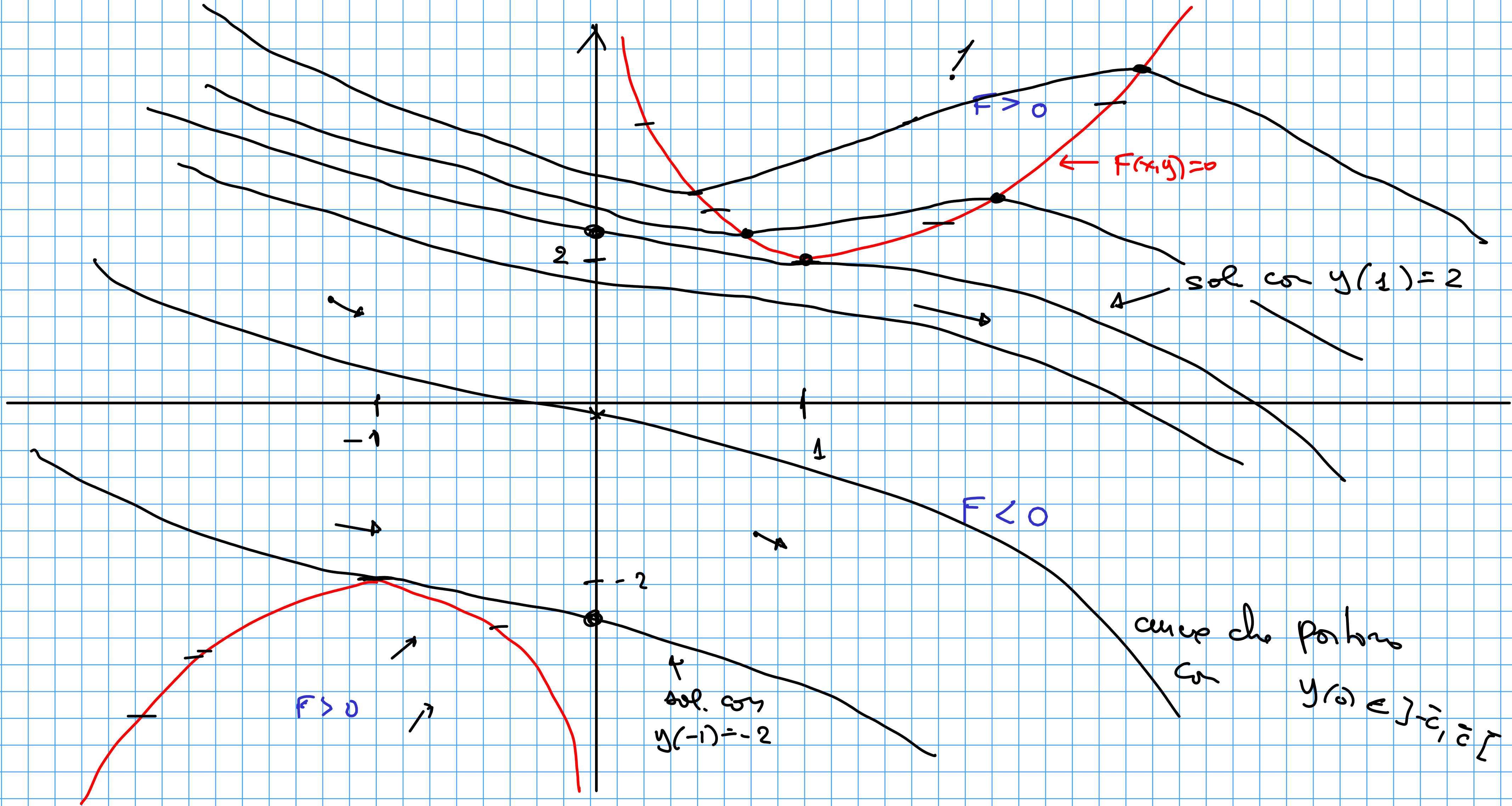
VEDIAMO COME È fatto $h(x)$,

- $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad (x \neq 0)$ $\qquad h$ DISPARI
- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

  $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$

- $h'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2} \qquad h' > 0 \iff |x| > 1$

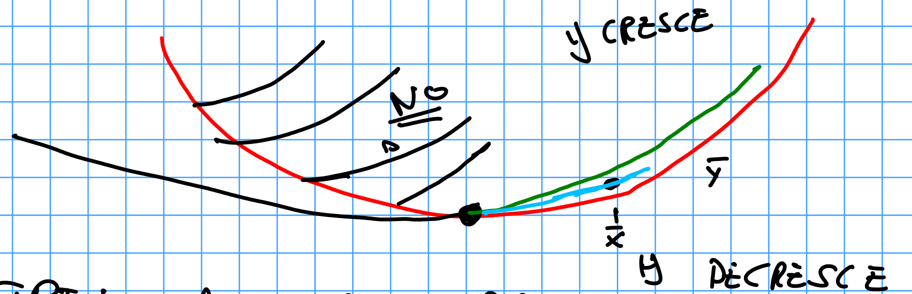
$$y'(x) = F(x, y(x))$$



- Disegno per primo caso la curva $y(x)$ con condizione $y(1)=2$
tale curva ha derivata nulla in $x=1$ - VEDIAMO CHE TALE CURVA STA SEMPRE SOTTO LA CURVA $h(x)$

INFATTI (1) SE $x<1$ e ~~se~~ $y(x) > h(x) > 2 \Rightarrow y(x)$ CRESCE E NON PUÒ ARRIVARE A $y(1)=2$

(2) se $x>1$ METTIAMO CHE $y(x)$ CRESCA RIMANDO SOPRA h



(CURVA VERDE) POTREI ALLORA PRENDERE UN PUNTO $(\bar x, \bar y)$ CON $\bar x > 1$ e $\bar y < y(\bar x)$ e guardo cosa fa la soluzione $\bar y$ per $(\bar x, \bar y)$, quando $x \in]1, \bar x[$

TALE CURVA NON PUÒ SCENDERE SOTTO $h(x)$

PERCHÉ se lo facesse dovrebbe arrivare in una zona in cui $\bar y' < 0 \implies h(x) \le \bar y \le y(x) \implies \bar y(1) = 2$

ASSURDO

DUNQUE LA SOL. $\bar y$ che verifica $\bar y(1) = 2$ deve essere sempre sotto $h(x)$, tranne che in $(1,2)$ in cui si toccano

POSSIAMO CHIAMARE $\bar c = \bar y(0)$ (e $-\bar c$ sarà $y_1(0)$ se y_1 è quella con $y_1(-1) = -2$)

Si potrebbe vedere che $\bar c$ è quello dell'altro metodo!

ALLORA

- se $y(0)$ è tra $-\bar{c}$ e $\bar{c}$ la sol decresce sempre
- se $y(0) = \bar{c}$ ho la curva $\bar{y}$ che decresce sempre
- se $y(0) > \bar{c}$ e un certo $x_1 > 0$ $y(x_1) = h(x_1) \Rightarrow$ da x_1 in poi (per un po') $y(x)$ cresce.

DATO PERÒ CHE $\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$ (!!) deve esistere $x_2 > 1$ in cui $y(x_2) = h(x_2)$ e da x_2 in poi $y(x)$ decresce (e $\to -\infty$)

ALTRO ESEMPIO (CHE RIPRENDEREMO)

$$y' = \frac{3}{x} y - \frac{24}{1+x^2} \qquad \underline{\underline{x>0}}$$

$$a(x) = \frac{3}{x} \qquad b(x) = \frac{-24}{1+x^2} \qquad x_0 = 1 \text{ (per es)}$$

$$A(x) = \int_1^x \frac{3}{t}\,dt = \left[3\ln t \right]_1^x = \ln x^3$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = x^3 \left(y(1) - 24 \int_1^x \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{t^3}\, dt \right)$$

(DA FINIRE)

$$\int \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{t^3} = \int \frac{1}{1+t^2} \frac{t}{t^4}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{(1+y)y^2}$$

$$y = t^2$$

VEDIAMO LA ZONA IN CUI $y' > 0$

$$F(x) = \frac{3y}{x} - \frac{24}{1+x^2}$$

(su $\underline{x > 0}$, $y \in \mathbb{R}$)

$$F(x) > 0 \iff \boxed{y > \frac{8x}{1+x^2}}$$

Pongo $h(x) = \dfrac{8x}{1+x^2}$; $h(0) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$

$$h'(x) = \frac{8(1+x^2) - 16x}{(1+x^2)^2} = \frac{8(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \, . \qquad h'(x) = 0 \iff x = 1$$

$h(1) = 4$ $\qquad h' > 0$ se $0 < x < 1$, $h' > 0$ se $x > 1$