Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentaquattresima lezione, 21 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Il secondo compitino è fissato per sabato 26 maggio in aula B.21, alle 8.45

(l'ultima lezione è sostituita dal compitino)

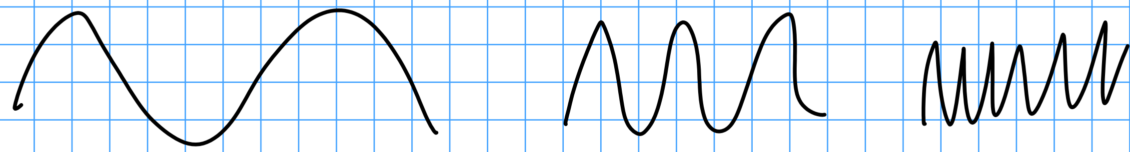
Serie di Fourier.

IDEA: dato una funzione T-periodica cerco di scrivere

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)} \qquad (*)$$

T periodiche

dove $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$



FATTO: se $n \neq m$ interi

(1) $$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0$$

(2) $$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0$$

(3) $\forall n, m$ $$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(n\omega t)\,dt = 0$$

(*) $\forall n \geq 1$ $$\int_0^T \cos^2(n\omega t)\,dt = \int_0^T \sin^2(n\omega T) = \frac{T}{2} \; ; \left(\int_0^T 1\,dt = T\right)$$

(1) Integro per parti: (se sono ≥ 1 — se no la formula è facile)

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\cos(m\omega t)\right]_0^T$$

fa zero sia in $t=0$ che in $t=T$

$$+\int_0^T \frac{\sin(n\omega t)}{n\cancel{\omega}}\, m\cancel{\omega}\,\sin(m\omega t)\,dt =$$

(di nuovo integro per parti)

$$\frac{m}{n}\left[\frac{-\cos(n\omega)t}{n\omega}\sin(m\omega t)\right]_0^T + \frac{m}{n}\int_0^T \frac{\cos(n\omega t)}{n\cancel{\omega}}\, m\cancel{\omega}\cos(m\omega t)\,dt =$$

fa zero sia in 0 che in T

$$\frac{m}{n}^2{}_2\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt \iff$$

$\neq 1$

$$\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0 \implies \text{integrale} = 0$$

$\neq 0$

Nello stesso modo si provano (2) e (3)

(4) $$\int_0^T \cos^2(n\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1+\cos(2n\omega t)}{2}\,dt = \int_0^T \frac{1}{2} = \frac{T}{2}$$

ha integrale nullo sul periodo T

Questi calcoli ci permettono di individuare a_n e b_n

Supponiamo che valga la formula $(*)$ e che si possano fare gli "scambi serie e integrale" che ora useremo:

Fisso k intero. Moltiplico $(*)$ per $\cos(k\omega t)$ e integro tra 0 e T :

(nota che b_0 non ha significato)

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_0^T \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)\cos(k\omega t)\,dt$$

(? andrebbe giustificato)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(k\omega t)\,dt}_{\substack{\text{tutti nulli eccetto quello}\\ \text{con } n=k \text{ che fa } T/2 \text{ - se } k\geq 1 \text{ -}\\ T \text{ se } k=0}} + b_n \underbrace{\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(k\omega t)\,dt}_{\text{tutti nulli}}\Big)$$

$$= a_k \cdot \frac{T}{2} \quad \text{se } k \geq 1 \quad / \quad a_0\, T \quad \text{se } k=0$$

NE SEGUE che

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt & \text{se } k \geq 1 \\ \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Se invece moltiplico per $\sin(k\omega t)$ e integro . . .

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) \qquad k \geq 1$$

Questi numeri si chiamano $\boxed{\text{COEFFICIENTI DI FOURIER DI } f.}$

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$ (dove a_k e b_k sono quelli)

si chiama $\boxed{\text{SERIE DI FOURIER di } f}$

PROBLEMI : (1) Sotto quali condizioni la serie di Fourier converge a f.

(2) Partendo da due successioni (a_k) e (b_k), sotto quali condizioni, la serie costruita a partire da (a_k) e (b_k)

converge a una f ? — Se ciò avviene che regolarità ha questa f ? ← QUESTO ULTIMO PROBLEMA ha una risposta di questo tipo: f è tanto più regolare quanto più le serie $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$ sono sommabili

Nessuno dim. dei teoremi che seguono

TEOREMA Se f è derivabile con derivata continua $\Longrightarrow$

definiti a_n e b_n come sopra si ha

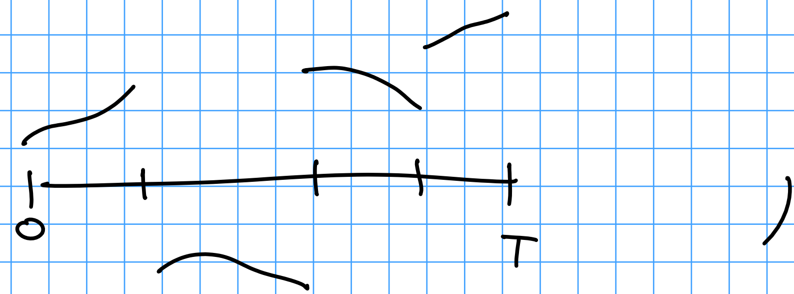
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{CONVERGE A } f(t) \ \forall t$$

Più in generale, se f è "regolare a tratti" cioè se esistono

$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < T$ tali che

$\left[\begin{array}{l} f \text{ è derivabile in ogni }]t_i, t_{i+1}[\\ \text{e } f' \text{ è limitata in questo intervallo} \end{array}\right]$ (NO CUSPIDI)

$\Longrightarrow$ in ogni t_i f ha limite dx e limite sx (SI DIMOSTRA)



$\Rightarrow$ la serie di Fourier converge in ogni punto t a

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{s\to t^-} f(s) + \lim_{s\to t^+} f(s)\right) \quad \left(= f(s) \text{ se } s \neq t_1 \dots t_h\right)$$

SE SO SOLO CHE f è continua non posso dedurre che f è somma della sua serie di Fourier.

TEOREMA Dati (a_n) e (b_n) tali che (a) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e $\sum_{1}^{\infty} |b_n| < +\infty$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$ CONVERGE

(questo si vede facilmente dato che $|a_n \cos(n\omega t)| \leq |a_n|$ e ...)

e la funzione $f(t)$ definita da questa serie è continua

(b) Se in più suppongo che $\sum_n n^k |a_n| < +\infty$, $\sum_n n^k |b_n| < +\infty$

(k è un intero fissato) $\Rightarrow$ f è derivabile k volte

con derivate fino alla k-esima continue e si ha

$$f'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\omega a_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} n\omega b_n \cos(n\omega t)$$

$$f''(t) = \vdots -$$

$\vdots$

(LA DERIVATA È DATA DALLA SERIE DELLE DERIVATE - È ANCORA UNA SERIE DI FOURIER ..)

<u>TEOREMA</u> (VAGO) Se $\int_0^T f^2(t)\,dt$ è "convergente" (ENERGIA FINITA)

e se a_n b_n sono i relativi coeff di Fourier $\Rightarrow$

$$\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) + T a_0^2$$

(FORMULA DI PARCEVAL)

<u>OSS.</u> (1) per calcolare i coeff. di Fourier posso integrare su un qualunque $[a,b]$ con $b-a=T$

- per esempio su $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

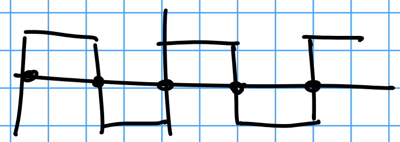
(2) se f è pari $\left(f(t) = f(-t) \right) \Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$

(3) se f è dispari $\left(f(t) = -f(-t) \right) \Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$

ESEMPI

$\underline{T = 2\pi}$ $\quad \omega = 1$

onda quadra



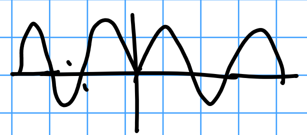
$$f(t) \begin{cases} -1 & \text{su }]-\pi, 0[\\ 0 & \text{in } t = -\pi, 0, \pi \\ 1 & \text{su }]0, \pi[\end{cases}$$

e poi periodicizzata di per. 2π

- f è regolare e dotata (e nei salti l'ho definita come la media fra limite dx e limite sx) $\Rightarrow$ f è somma della sua serie di F.
- f è DISPARI $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n$
- Calcoliamo i (b_n).

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(nt)}_{\text{È PARI}} \, dt = 2\int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt = 2\left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2 - 2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2\left(1 - (-1)^n\right)}{n} = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ \frac{4}{n} & n \text{ DISP.} \end{cases}$$



IN DEFINITIVA

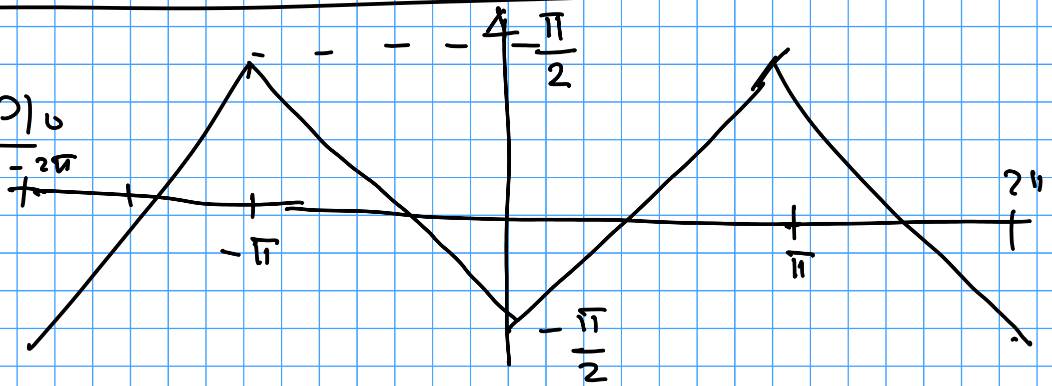
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \sin\left((2k+1) t \right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

NOTA CHE, $\forall\, t$ per t, la serie NON SEMBRA (E NON LO È) ASSOLUTAMENTE CONV., dato che i termini sono termine oscillante limitato $\sim \frac{1}{n}$ ($\longleftrightarrow$ f è discontinua)

Se prendo $t = \frac{\pi}{2}$ viene $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \Longrightarrow$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

ALTRO ESEMPIO



$f(t) = -\frac{\pi}{2} + |t|$ su $[-\pi, \pi]$ (e periodizzata di per. 2π)

- sempre regolare a tratti (ma anche continua) $\Longrightarrow$

f = somma della sua serie di F.

f è PARI $\Rightarrow$ $b_n = 0$; $\int_0^{2\pi} f = 0$ $a_0 = 0$

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = 2\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$2\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \frac{2}{n}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$

fa zero sia in 0 che in π

$$= \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{4}{n^2} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)$$

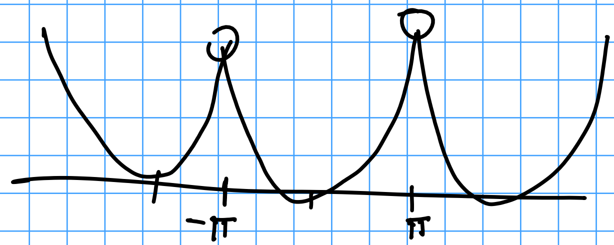
STAVOLTA $a_n \simeq \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ f continua!!

PERÒ $n a_n \simeq \frac{1}{n}$ e f NON è DERIVABILE

Se metto $t=0$ trovo $-\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

* Se prendessi $f(t) = t^2$ su $[-\pi, \pi]$



e faccio lo sviluppo in serie di F. POTREI TROVARE una serie $\simeq \frac{1}{n^2}$ e trovare $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

CHI VOGLIA PROVARE ...

$\underline{n \geq 1}$ $\pi a_n = 2\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt = 2\left[t^2 \underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_{=0} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n}\int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt =$

$-\frac{4}{n}\left[t \frac{(-\cos(nt))}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{n^2}\int_0^{\pi} \cos(nt)\, dt = \frac{4}{n^2}\pi\cos(n\pi)$

$-\frac{4}{n^2}\left[\underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_{=0} \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{4}{n^2}\pi(-1)^n} \leftarrow \pi a_n$

a_0

$\underline{n=0}$ $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}} \Rightarrow$

$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$. Se metto $t = \pi$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{(3-1)}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

$f(\pi)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

In astratto si tratta di trovare una funzione (incognita) $y(x)$ derivabile N volte, tale che

$$\mathcal{F}\left(y(x), y'(x), \dots, y^{(N)}(x), x\right) = 0$$

dove $\mathcal{F}$ è data.

<u>NOTA</u> Nell'incognita y è contenuto anche l'intervallo di definizione di $y(x)$

- $N \leftarrow$ ORDINE DELL'EQUAZIONE ($y'' \cdot y - x^2 y' = e^x$ è un'eq. del II° ordine)

- L'equazione si dice IN FORMA NORMALE se posso scriverla

$$y^{(N)}(x) = \mathcal{F}_0\left(y(x), y'(x), \dots, y^{(N-1)}(x), x\right)$$

se cioè POSSO "ESPLICITARE" LA DERIVATA DI ORDINE MAX

- L'equazione si dice AUTONOMA se non c'è x in $\mathcal{F}_0 / \mathcal{F}$

$$\mathcal{F}\left(y(x), \dots y^{(N)}(x)\right) = 0$$

- L'equazione si dice LINEARE se è del tipo

$$a_N(x)\, y^{(N)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

dove $a_0 \dots a_N$ b sono i COEFFICIENTI dell'eq.

Se $b = 0$ l'eq. lineare si dice OMOGENEA

TRATTEREMO: - SEMPRE EQ. IN FORMA NORMALE in part.

- EQ. LINEARI DEL I° ORDINE
- EQ. LINEARI DI ORDINE N, CON COEFFICIENTI COSTANTI
- EQ. DEL I° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

ABBIAMO DELLE FORMULE RISOLUTIVE

+ Alcuni teoremi generali di esistenza (SENZA DIM.)

CASO PIU' SEMPLICE: EQ. LINEARE DEL I° ORDINE (F. NORMALE)

$$(E) \qquad y' = a(x)\, y + b(x)$$

dove a, b sono funzioni continue su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$

NOTA Se $a = 0$ l'eq. $y' = b$ è il problema delle primitive e quindi noi sappiamo che: fissato $x_0 \in I$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)\,dt + y(x_0) \qquad \forall x \in I$$

QUINDI (già in questo caso elementare) NON C'È UN'UNICA SOL. DI (E) dato che $y(x_0)$ può essere scelto arbitrariamente — PERÒ ogni soluzione È UNIVOCAMENTE INDIVIDUATA dal suo valore in x_0

Vedremo che questo è sempre vero: il problema

$$(P) \quad \begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0 & \leftarrow \text{CONDIZIONE INIZIALE} \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

HA UNA E UNA SOLA soluzione per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ (AVENDO FISSATO x_0)

Vediamo come si risolve (E). Prendo $x_0 \in I$

DEFINISCO $\boxed{A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$ (la primitiva di a che vale 0 in x_0)

Supponiamo che y sia soluzione e moltiplichiamo (E) per $e^{-A(x)}$ — NOTIAMO CHE $\frac{d}{dx} e^{-A(x)} = -e^{-A(x)} \cdot A'(x) = -a(x)e^{-Ax}$.

$$y'(x)\, e^{-A(x)} - y(x) \underbrace{a(x)\, e^{-A(x)}}_{\frac{d}{dx} e^{-A(x)}} = b(x)\, e^{-A(x)} \iff$$

$$\left(y(x) e^{-A(x)}\right)' = b(x)\, e^{-A(x)} \iff$$

$$y(x)\, e^{-A(x)} = y(x_0) \underbrace{e^{-A(x_0)}}_{\substack{1 \text{ perché} \\ A(x_0)=0}} + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt$$

$$\iff \boxed{y(x) = e^{A(x)} \left\{ y(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right\}}$$

FORMULA RISOLUTIVA

È facile vedere che questa formula ci dà effettivamente una sol.

IN PART. IL PROBLEMA DI CAUCHY (P) ha una e una sola sol.

$$y(x) = e^{A(x)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right\}$$

ESEMPI

$A = a$ costante, $b(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$. POSSO PRENDERE $x_0 = 0$

$$y' = a y + b(x) \Rightarrow A(x) = ax \qquad \left(\int_0^x a\, dt = ax \right)$$

$$y(x) = e^{ax} \left(y_0 + \int_0^x b(t) e^{-at} dt \right)$$

Se $b = 0$ $\quad y(x) = y_0 e^{ax}$ $\quad$ $\left(\begin{array}{l} \text{VERIFICA} \quad y'(x) = a y_0 e^{ax} = a\, y(x) \\ y(0) = y_0 e^0 = y_0 \qquad !! \end{array} \right)$

Se $b(x) = x$ devo calcolare $\int_0^x t e^{-at} dt =$ (per parti)

$$\left[t \frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^x + \frac{1}{a} \int_0^x e^{-at} dt = -\frac{x}{a} e^{-ax} + \frac{1}{a} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^x =$$

$$-\frac{x}{a} e^{-ax} - \frac{1}{a^2} \left(e^{-ax} - 1 \right) = -\frac{ax+1}{a^2} e^{-ax} + \frac{1}{a^2}$$

⇒ la sol. di $y' = ay + x$ è data da

$$y(x) = e^{ax}\left(y_0 - \frac{ax+1}{a^2}e^{-ax} + \frac{1}{a^2}\right) =$$

$$\boxed{e^{ax}\left(y_0 + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{ax+1}{a^2}}$$

(NOTA CHE $y(0) = y_0 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} = y_0$)

SOL. DELL'OMOGENEA

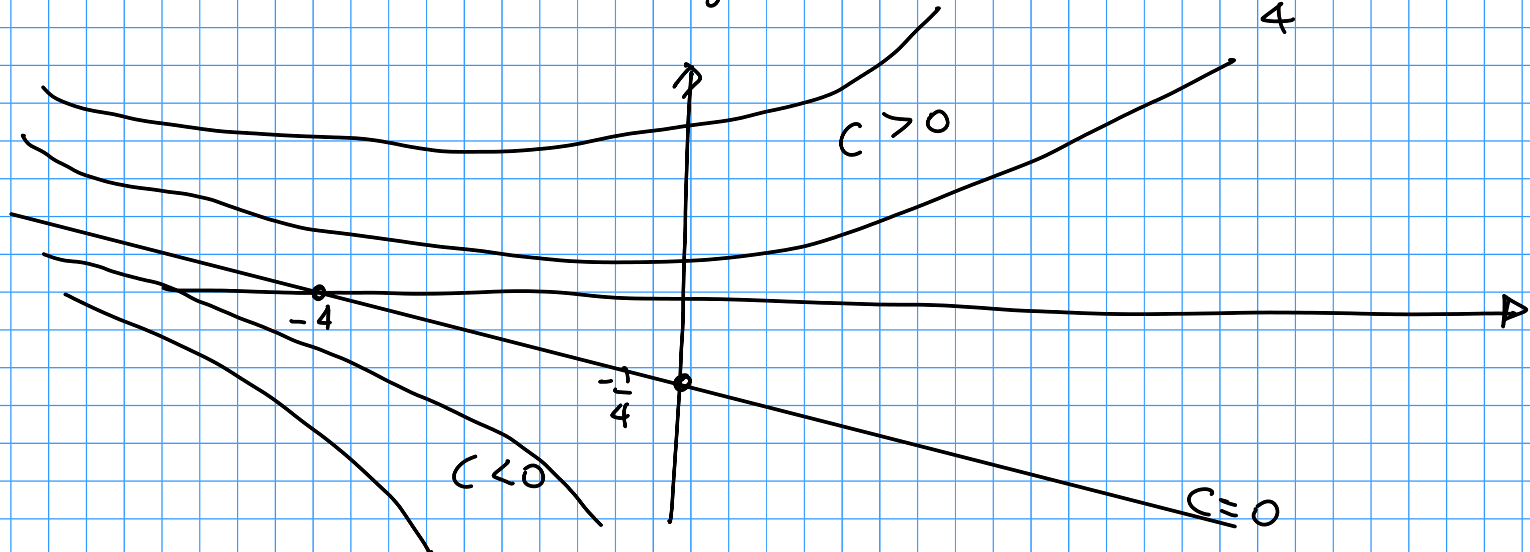
(TUTTE LE SOL. DELL'OMOG. se VARIO y_0)

SOL. PARTICOLARE (quella con $y(0) = -\frac{1}{a^2}$)

Posso anche dire che la "famiglia" delle sol. è data da

(CASO $a=2$)

$$y(x) = c\,e^{2x} - \frac{2x+1}{4}$$ al variare di $c \in \mathbb{R}$



$$c = y(0) + \frac{1}{4}$$

SI VEDE CHE

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y(0) > -1/4 \\ -\infty & \text{se } y(0) \leq -1/4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$$

NOTA Nel grafico sopra: per ogni punto (x_0, y_0) PASSA UNA E UNA SOLA CURVA (come si vede dalla formula risolutiva che stabilisce esistenza e unicità della sol di P)

DUNQUE queste curve NON SI INTERSECANO.