Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentatreesima lezione, 20 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

ESERCIZI

$\sum_n \frac{n^2+1}{n^4+1}$ $\quad \sum_n \frac{\sqrt[n]{3}-1}{n}$ $\quad \boxed{AC}$ $\boxed{C}$ $\boxed{NC}$

$\sum_n \frac{(-1)^n n^2}{1+n^3}$ $\quad \sum_n (-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$

$\sum_n \frac{\sin(n)\, n^2}{1+n+n^2+n^4}$ $\quad \sum_n \frac{n!}{n^n}\sin(n)$ $\quad \sum_n \frac{\cos(n)+n}{n^2}$

$\sum_n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$ $\quad \sum_n 2^n \sin\left(3^{-n}\right)$ $\quad \sum_n \frac{\ln(n+1)-\ln(n-1)}{n}$

$$b_n = \left(\sqrt[n]{3}-1\right) \quad ??$$

$\sum_n \frac{n^2+1}{n^4+1}$ CONVERGE PERCHÉ $\frac{n^2+1}{n^4+1} \simeq \frac{1}{n^2}$ in quanto

$$\frac{\frac{n^2+1}{n^4+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{n^4+1} \longrightarrow 1$$

$\sum_n \frac{\sqrt[n]{3}}{n}$ DIVERGE DATO CHE $\sqrt[n]{3} \to 1$ e quindi $\frac{\sqrt[n]{3}}{n} \simeq \frac{1}{n}$

Reis $\quad b_n = \sqrt[n]{3} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(3)} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{n}\ln(3) + o\left(\frac{1}{n}\ln(3)\right) \cancel{-1} \simeq \frac{\ln(3)}{n}$

$\Rightarrow \quad \frac{b_n}{n} \simeq \frac{\ln(3)}{n^2}$ per cui $\sum_n \frac{\sqrt[n]{3}-1}{n}$ CONVERGE

Per gli stessi calcoli $\sum_n b_n$ diverge $(\leftarrow)$ $\left(\sum_n \frac{\ln(3)}{n} \text{ DIVERGE}\right)$

e quindi $\sum_n (-1)^n b_n$ NON CONV. ASSOLUTAMENTE

Però è chiaro che $n \mapsto \sqrt[n]{3}$ è decrescente $\Rightarrow$ b_n decresce e tende a zero $\Rightarrow$ $\sum_n (-1)^n b$ CONVERGE PER LEIBNIZ.

$\sum_n (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$ $\boxed{C}$ (MA NON A.C.)

RAPPRESENTAZIONE DECIMALE DI UN NUMERO.

Prendo X - per semplicità $0 \leq X < 1$

A questo X corrisponde una successione $a_1 \dots a_n \dots$ con a_n intero tra 0 e 9 -

$X = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ $\leftarrow$ IN CHE SENSO

Se $a_m = 0$ da N in poi la scrittura sopra significa

$$X = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_N}{10^N}$$

IN GENERALE la scrittura significa che

$$X = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{10^m}$$

DOMANDA: posso essere sicuro che, dato (a_m), la serie scritta a $\bigstar$ sia convergente (a un numero < 1!)

CONVERGENZA Applico il confronto

$$\left| \frac{a_m}{10^n} \right| \leq \frac{9}{10^n}$$ Dunque posso confrontare con

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{m-1} = \frac{9}{10} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

CONVERGE A $\frac{9}{10} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$

Però se almeno uno degli a_n è < 9 la somma $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < 1$

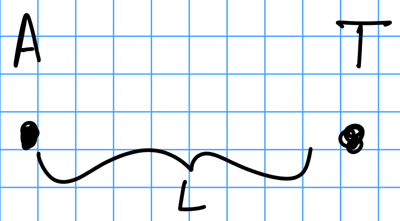
Notiamo che due allineamenti $a_1 \dots a_n \dots$ e $b_1 \dots b_n \dots$ danno lo stesso X $\Longleftrightarrow$ $a_n = 9$ per ogni $n \geq N$, $a_{N-1} \neq 9$

$b_n = 0 \quad \forall n \geq N \qquad b_{N-1} = a_{N-1} + 1$ (o VICEVERSA)

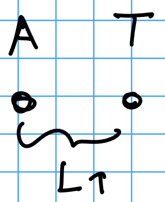
Altra "digressione" sulle serie

Achille e la tartaruga

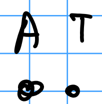
ISTANTE INIZIALE



Dopo un certo tempo T_1 Achille raggiunge la posizione che T aveva all'istante iniziale — PERÒ T si è spostato!



Dopo un tempo T_2 Achille raggiunge la posizione di T all'istante T_1 MA T si è mossa!!



Per il sig. Zenone, Achille non avrebbe mai potuto raggiungere la tartaruga

Problema teorico: posso percorrere infiniti punti in un tempo finito?!

PER NOI SI PUÒ - come formalizziamo il problema ??

Achille ha velocità V_A
La tartaruga ha velocità V_T
La distanza iniziale tra i due è L_0

Quanto ci mette Achille per per percorrere lo spazio L_0

$$T_1 : \frac{L_0}{V_A}$$

Quanto spazio percorre la tartaruga nel tempo T_1 ??

$$L_1 = V_T \cdot T_1 = \frac{V_T}{V_A} \cdot L_0$$

Per fare lo spazio L_1 Achille ci mette $T_2 = \frac{L_1}{V_A} = \frac{1}{V_A} \frac{V_T}{V_A} L_0$

Nel tempo T_2 la tartaruga percorre $L_2 = V_T \cdot T_2 = \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^2 L_0$

Iterando troviamo due successioni $(T_0 = 0)$

$$T_n = \frac{L_0}{V_A} \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^{n-1} \qquad L_n = \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^n L_0$$

Le somme $T_0 + T_1 + \dots + T_n$ e $L_0 + L_1 + \dots L_n$

rappresentano il tempo complessivo e lo spazio complessivo (rel. a T) dopo "n passi". Queste somme sono le somme parziali di

$$\frac{L_0}{V_A}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{V_T}{V_A}\right)^k \qquad L_0=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{V_T}{V_A}\right)^k$$

Dato che $V_T < V_A$ (Achille è più veloce!) entrambe le serie convergono (sono serie geometriche!) e

$$T=\frac{L_0}{V_A}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{V_T}{V_A}\right)^m=\frac{L_0}{V_A}\,\frac{1}{1-\frac{V_T}{V_A}}=\frac{L_0}{V_A}\,\frac{V_A}{V_A-V_T}=\frac{L_0}{V_A-V_T}$$

$$L=\frac{L_0\,V_A}{V_A-V_T}$$

che corrispondono al tempo di incontro / alla posizione di incontro tra Achille e la tartaruga

Anche se sommo INFINITI tempi / spazi posso ottenere un risultato FINITO (purché gli addendi siano <u>infinitesimi</u>)

Giochiamo con le serie divergenti

Supponiamo di avere N monete da 1 € e vogliamo formare una pila IN EQUILIBRIO in cui la moneta superiore sia più lontano possibile da quella di base

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO :

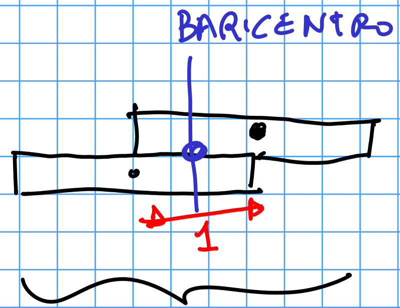
$\forall K$

Le ultime K monete devono avere baricentro dentro la moneta su cui poggiano

proiezione del V

(1 = raggio di una moneta)

N=2

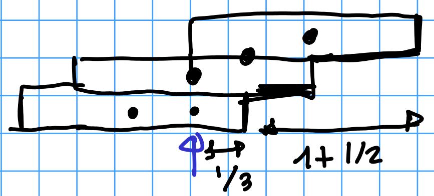


sono in equilibrio

DOVE E' IL BARICENTRO TRA LE DUE? A METÀ STRADA TRA I DUE CENTRI

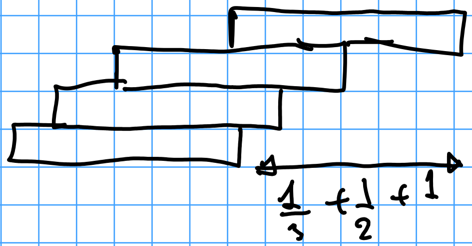
N=3

Prendo le due di sopra e le appoggio sul terzo



NUOVO BARICENTRO

N = 4 Posso appoggiare le tre a distanza 1/3 dal bordo della 4ª



... — e così via

DOPO N+1 PASSI la distanza tra bordo della moneta di base e bordo della moneta superiore vale $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}$

QUESTA DISTANZA DIVERGE ($\simeq \log(N)$) se $N\to+\infty$

GIÀ CON 5 MONETE quella di sopra è esterna a quella di sotto!

ALCUNE SERIE DI TIPO SPECIALE (SERIE DI POTENZE)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dove x è un parametro reale.

può convergere / non convergere a seconda di x !

FATTO Se esiste $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\ell$ allora la serie di potenze:

$$\begin{cases} \text{CONVERGE ASS. quando} & |x| < 1/\ell \quad (= R) \\ \text{NON CONVERGE quando} & |x| > 1/\ell \quad (= R) \end{cases}$$

R si chiama raggio di convergenza della serie.

<u>Dim.</u> Applico il criterio della radice a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ $\Rightarrow$ calcolo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\,\ell$$

SE $|x|\,\ell < 1$ CONV. $\Rightarrow$ CONV. ASS. $\left(|x| < \frac{1}{e}\right)$

SE $|x|\,\ell > 1$ si vede che $a_n |x|^n \to +\infty$ NON CONV.

<u>NOTA</u> Se $\ell = 0$ $R = +\infty$, se $\ell = +\infty$ $R = 0$ (NON CONV. MAI)

La presenza di questo limite individua il comportamento della serie per tutte le x, eccetto $x = \pm R$ $\Leftarrow$ questi casi non si possono determinare a priori – BISOGNA VEDERE CASO PER CASO

<u>ESEMPI</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad a_n = 1 \qquad \sqrt[n]{a_n} \to 1$$

la serie converge $^{(ASS.)}$ se $|x| < 1$, non conv. se $|x| > 1$

POI VEDO che non conv. neanche in $x = \pm 1$

LO SAPEVO GIA'

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$ e quindi anche

questa serie converge (ASS.) se $|x| < 1$, non conv. se $|x| > 1$.

Se poi metto $x = \pm 1$ trovo $\sum_n \frac{1}{n^2}$ e $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$

ENTRAMBE ASS. CONV. (qui la serie conv. $\Longleftrightarrow$ $|x| \leq 1$)

$\sum \frac{x^n}{n}$ - - - - - - CONV. ASS se $|x| < 1$, DIVERGE $x \geq 1$

CONV. per $x = -1$, NON CONV. se $x < -1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ se faccio $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ (uso Cesaro) trovo $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \to 0$

$\Longrightarrow$ $R = +\infty$, cioè la serie converge (ass.) $\forall x$.

<u>PROBLEMA</u> Detto che la serie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

è definita su $]-R, R[$ (perché $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1/R$)

CHE REGOLARITÀ HA LA $S(x)$ - RISPETTO A x !

Teorema (senza dim.).

Dove la serie converge la somma $S(x)$ è una funzione (continua e) (infinitamente) derivabile e la sua derivata è

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1}$$

che è un'altra serie di potenze AVENTE LO STESSO RAGGIO DI CONV.

e quindi (iterando)

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} \qquad \forall x \in\,]-R, R[$$

QUESTE SERIE SONO MOLTO IMPORTANTI NELLA PRATICA

se riesco a esprimere una $f(x)$ mediante una serie di potenze

ho a disposizione un metodo molto comodo per calcolarla.

Torniamo a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Ricordiamo che

lo sviluppo di Taylor di $f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$ dice:

$$e^x = \underbrace{1 + x + \dots + \frac{x^m}{m!}}_{\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(t_{m,x})\, x^{m+1}}{(m+1)!}}_{R_n(x) \text{ resto di Lagrange}} \qquad \left(f^{(n+1)}(t_{n,x}) = e^{t_{n,x}} \right)$$

dove $t_{m,x}$ è compreso tra 0 e x

Posso valutare $R_n(x)$ scrivendo

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}\, |x|^{m+1}}{(m+1)!} \longrightarrow 0$$

perché il fattoriale VINCE su $|x|^{n+1}$

DUNQUE $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{m!} = e^x$

Potrei anche USARE la serie sopra per DEFINIRE e^x

se facessi così potrei DIMOSTRARE che $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ in

questo modo: per il teorema di prima so che e^x

è derivabile e che $\displaystyle\frac{d}{dx} e^x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m!} x^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(m-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{m!} = e^x$

ALTRO ESEMPIO

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

(abbiamo visto prima che converge in $[-1, 1[$)

So che f è derivabile e che $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{n} x^{n-1}}{\cancel{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = g(x) = \frac{1}{1-x}$$

DUNQUE $f'(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(x) = -\ln(1-x) + K$

(per $x \in [-1, 1[$). Calcolo $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$

$$\| $$

$$-\ln(1-0) + K$$

DUNQUE $K = 0$ cioè $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$