Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentaduesima lezione, 14 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Teorema (criterio di Leibniz) Se $\{a_n\}$ è tale che:

(a) $a_n \geq 0 \quad \forall n$

(b) $\{a_n\}$ decrescente: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$

(c) $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

} basta per n grande

Allora la serie a segni alterni $\sum_n (-1)^n a_n$ è convergente.

IN REALTÀ SI PUÒ DIM. un risultato più forte: (CHE NON DIMOSTRIAMO)

Teorema (criterio di Abel) Se $\{a_n\}$ è decrescente e $a_n \to 0$ ($\Rightarrow a_n \geq 0$). e b_n è tale che, posto $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, si ha

$|B_n| \leq M$ per un opportuno M, ALLORA la serie

$\sum_n a_n b_n$ CONVERGE

(Abel $\Rightarrow$ Leibniz prendendo $b_n = (-1)^n$)

Dimostrazione Leibniz. Poniamo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

Per dim. la convergenza devo provare che S_n ha limite finito.

Per questo considero separatamente S_n con n pari e S_n con n dispari : $\quad S'_k = S_{2k+1} \qquad S''_k = S_{2k}$

Se dimostro che S'_k e S''_k hanno limite finito e i due limiti coincidono $\Rightarrow$ ho FINITO. (teorema sulle successioni)

Dico che S''_k è monotona decrescente, infatti

$$S''_{k+1} - S''_k = S_{2(k+1)} - S_{2k} = S_{2k+2} - S_{2k} =$$

(an decresc)

$$\sum_{K=0}^{2k+2} (-1)^K a_K - \sum_{K=0}^{2k} (-1)^K a_K = - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$$

$$\left(a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2k+2}\right) - \left(a_0 + \dots + a_{2k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S''_{k+1} \leq S''_k}$$

Analogamente vedo che S'_k è crescente:

$$S'_{k+1} - S'_k = S_{2k+3} - S_{2k+1} = + a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S'_{k+1} \geq S'_k}$$

CONFRONTIAMO S''_k e S'_k

$$S'_k = S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1} = S''_k - a_{2k+1} \leq S''_k$$

$$\underbrace{a_0 - a_1 + a_2 - \quad + a_{2k}}_{S_{2k}} - a_{2k+1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S'_k \leq S''_k} \quad \Leftarrow \quad S'_k = S''_k - a_{2k+1}$$

Riassumendo:

$$a_0 - a_1 = S'_0 \leq S'_k \leq S'_{k+1} \leq S''_{k+1} \leq S''_k \leq S''_0 = a_0$$

quindi entrambe le successioni $\{S'_k\}$ e $\{S''_k\}$ hanno limite: $S'_k \to S'$, $S''_k \to S''$ e

$$(*) \rightarrow \quad S'_k \leq S' \leq S'' \leq S''_k \quad \forall k$$

Però, per quanto visto sopra $S''_k - S'_k = a_{2k+1} \to 0$ DUNQUE $S' = S''$

QUESTO CONCLUDE LA DIM.

NOTIAMO CHE DALLA DIM. SEGUE

$$(*)\quad \underbrace{\sum_{k=0}^{2h+1} (-1)^k a_k}_{= S_{2h+1}} \le \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k}_{= S} \le \underbrace{\sum_{k=0}^{2h} (-1)^k a_k}_{= S_{2h}}$$

cosa che può servire per "stimare" la convergenza:

Dato che $\sum_{k=0}^{2h} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2h+1} (-1)^k a_k = a_{2h+1} \Rightarrow$

$$|S - S_n| \le a_{n+1} \quad \forall n$$

Per esempio, se considero la "serie armonica a segni alterni"

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

CONVERGE PERCHÉ $\frac{1}{n}$ DECRESCE e TENDE A 0

e

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \right| \le \frac{1}{N+1}$$

NON È GRAN CHÉ...

È LEGATO AL FATTO CHE LA SERIE NON CONV. ASS.

"PROPRIETÀ DELLE SERIE"

Mi piacerebbe dimostrare che le serie godono delle stesse proprietà che godono le somme finite:

(a) ASSOCIATIVA

(b) COMMUTATIVA

(c) FORMULA RIGUARDANTE IL PRODOTTO DI DUE SERIE

(a) $$(a_1+a_2)+a_3 = a_1+a_2+3$$

Per dare un senso alla "proprietà associativa" nel caso delle serie, consideriamo la seguente def.

DEF Data $\{a_n\}$ successione, data $\{n_k\}$ successione di interi strettamente crescente $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < n_3 \dots$ ($\Rightarrow n_k \to +\infty$). Chiamo

$$b_k = a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}-1} = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \overbrace{a_0 \quad a_1}^{b_0} & & \overbrace{a_2 \quad a_3 \quad a_4}^{b_1} & & \overbrace{a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8}^{b_2} & & a_9 \\ n_0 & & n_1 & & n_2 & & n_3 \end{array}$$

e dico che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ è ottenuta da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

associando i termini.

DOMANDA che legame c'è tra

$\sum_n a_n$ converge E $\sum_n b_k$ converge

IN GENERALE NON C'È UN LEGAME CHIARO

Per es. se $a_n = (-1)^n \Rightarrow \sum_n (-1)^n$ è indeterminata.

Se poi $n_k = 2k \Rightarrow b_k = a_{2k} + a_{2k+1} = 1 - 1 = 0$

$\underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{1 - 1}_{0} \Rightarrow \sum_n b_k$ CONVERGE

DUNQUE È SICURAMENTE FALSO CHE $\sum_k b_k$ CONV $\Rightarrow \sum_n a_n$ conv.

QUELLO CHE VALE SICURAMENTE :

TEOREMA Sia $a_n \geq 0$. Allora

$\sum_n a_n$ converge $\iff$ $\sum_k b_k$ conv. (e le somme coincidono)

dove $\sum_k b_k$ è una qualunque serie ottenuta da $\sum_n a_n$ associando i termini.

Dim. Chiamo $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$, chiamo $S'_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$

SI VEDE CHE $\{S'_k\}$ è una sottosuccessione di $\{S_n\}$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$S'_k = \underbrace{(a_0 + \cdots + a_{n_0-1})}_{b_0} + \underbrace{(a_{n_1} + \cdots + a_{n_2-1})}_{b_1} + \cdots \underbrace{(a_{n_k} + \cdots + a_{n_{k+1}-1})}_{b_k} = S_{n_{k+1}-1}$$

DA QUESTO SEGUE CHE COMUNQUE $\sum_n a_n$ conv. $\Rightarrow$ $\sum_k b_k$ conv. (INDIPENDENTEMENTE DA $a_n \geq 0$) e le somme sono uguali

NEL CASO $a_n \geq 0$ $\Rightarrow$ S_n è crescente $\Rightarrow$ $S_n \to S$ per

$S \in [0, +\infty]$. Se una estratta ha limite finito $\Rightarrow$ $S \in \mathbb{R}$

Dunque se $\sum_k b_k$ conv. $\Rightarrow \sum_k a_n$ conv.

#

(b). Cosa vuol dire proprietà commutativa per una serie.

[CHIAMO PERMUTAZIONE DI $\mathbb{N}$ una funzione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sia iniettiva e surgettiva $(\sigma(n) = \sigma_n)$]

Data una successione $\{a_n\}$ chiamo "riordinata di $\{a_n\}$" una successione $\{b_n\}$ tale che $b_n = a_{\sigma_n}$ dove σ è una permutazione di $\mathbb{N}$.

<u>PROBLEMA</u> Sia $\{b_n\}$ riordinata di $\{a_n\}$. CHE LEGAME C'È tra $\sum_n a_n$ conv. e $\sum_n b_n$ conv.

(senza dimostrazione)

<u>TEOREMA</u> (a) Se $a_n \geq 0$ allora

$\sum_n a_n$ CONV. $\Longleftrightarrow \sum_n b_n$ CONV. (e le somme coincidono)

Potrei scrivere semplicemente $\sum_n a_n = \sum_n b_n$

(NEL CASO $a_n \geq 0$)

(b) Se $\sum_n a_n$ conv. assolutamente $\iff$ $\sum b_n$ conv. assolutamente (e le somme coincidono)

(c) Se $\sum a_n$ converge ma non converge assolutamente, allora preso un qualunque $S \in [-\infty, +\infty]$ posso trovare $\{b_n\}$ riordinata di $\{a_n\}$ tale che $\sum_n b_n = S$

Nel caso della convergenza semplice e non assoluta
NON VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA

La serie $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ può essere riordinata in maniera da convergere a ciò che si vuole (o da divergere)

IDEA di come si dimostra (c)

Se $\sum_n a_n$ converge, ma non conv ass. $\Rightarrow$

$a_n^+ \to 0$, $a_n^- \to 0$ ma $\sum a_n^+ = +\infty$ $\sum a_n^- = +\infty$

Mettiamo che io voglio trovare una riordinata che ha somma 0.

- $b_0 =$ primo degli a_n^+ che non sia nullo.
- $b_1 \dots b_{n_1}$ tutti termini negativi fino a che $b_0 + b_1 + \dots + b_{n_1}$ diventa < 0
- $b_{n_1+1} + \dots\ b_{n_2}$ tutti termini positivi fino a che la somma torna di nuovo > 0

QUESTO PROCEDIMENTO LO POSSO CONTINUARE INDEFINITAMENTE PERCHÉ, ognuna delle serie $\sum_{n \geq N} a_n^+ = +\infty$ $\sum_{n \geq N} a_n^-$ qualunque sia N. QUINDI HO SEMPRE A DISPOSIZIONE degli a_n^+ / a_n^-, con n grande quanto voglio, mi faccio passare da < 0 a > 0 o viceversa.

DATO CHE $a_n \to 0$ QUESTO PROCEDIMENTO FA SÌ CHE

LE SOMME DEI b_k tendono a zero

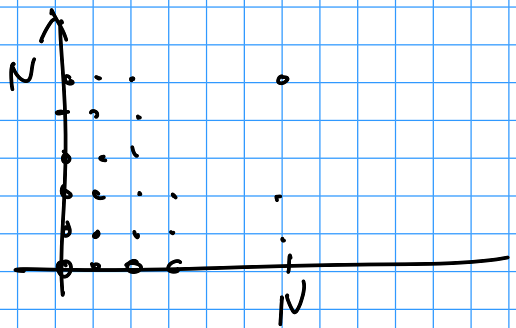
$$\boxed{\text{QUESTO RISULTATO METTE IN EVIDENZA L'IMPORTANZA DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA!}}$$

(c) PRODOTTO DI DUE SERIE ??

Problema: Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, supponiamo che $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergano. POSSO TROVARE (in "modo canonico") una $\{c_n\}$ tale che $\sum_n c_n = \sum_n a_n \sum_n b_n$

PENSIAMO A SOMME FINITE:

$(a_0 + \dots + a_N)(b_0 + \dots + b_N)$ = somma di tutti $a_k b_h$ al variare di $k, h \in \{0, \dots, N\}$

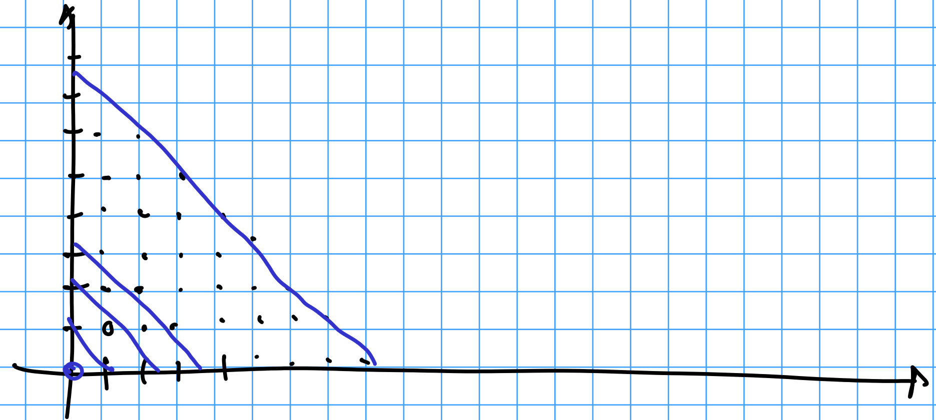


Se volessi scrivere per le serie sarei portato a scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \underbrace{\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m}_{??} \quad ??$$

VORREI UN UNICO INDICE

IDEA: SOMMARE LE DIAGONALI: INTRODUCO



$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$\vdots$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La $\{c_n\}$ si dice "prodotto alla Cauchy" di $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$

<u>Teorema</u> (1) Se $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$ allora (senza dim.)

$$\left(\sum_{n} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n} b_n\right) = \sum_{n} c_n$$

dove i valori delle serie può essere $+\infty$ (CONVENZIONE $0 \cdot \infty = 0$ <u>SOLO IN QUESTO CASO</u>) . Dunque la formula dà informazioni sulla convergenza

(b) Se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono assolutamente convergenti allora $\sum_n c_n$ è assolutamente convergente e vale la formula sopra.

(c) Fuori dai casi sopra la formula può non valere

SERIE DI TAYLOR

Ricordiamo che, se f è una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile N volte, posso costruire il pol. di Taylor

$$P_N(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^N$$

P_N approssima $f(x)$ a meno di $o((x-x_0)^N)$.

questa approssimazione si guarda N FISSATO e $x \to x_0$

SUPPONIAMO che f abbia derivata N-esima per ogni N (dirò che f è di classe C^∞) $\to$ posso costruire $P_N(x)$ per ogni N intero!

Problema: FISSATO x che succede se $N \to +\infty$; sarà vero

che $\lim_{N \to \infty} P_N(x) = f(x)$?

IN ALTRI TERMINI sarà vero che:

(*) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

– o meglio: per quali x vale la formula!

Se la risposta è sì si dirà che "f è somma della sua serie di Taylor"

ALCUNE RISPOSTE (negative / parzialmente negative)

Non è detto, in generale, che la formula valga $\forall x$

Se considero $f(x) = \frac{1}{1-x}$ so che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

SOLO PER LE $x \in]-1,1[$

E' RAGIONEVOLE RITENERE CHE (*) VALGA per x VICINO A x_0.

IN REALTA' ANCHE QUESTO NON È SEMPRE VERO.

Controesempio: Prendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. da

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È chiaro che f ha derivate di ogni ordine se $x \neq 0$.

Si vede che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(l'esponenziale vince) ; cioè $f(x) = o(x^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Si può dedurre che $\boxed{\exists \; f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k}$

PERÒ $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$, mentre la sua serie di Taylor è nulla (dato che ha tutti i coeff. nulli)

QUINDI QUESTA f NON È MAI (tranne che in $x=0$) SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR

Esempi POSITIVI

$f(x) = e^x$. La serie di Taylor è (centrata a $x_0=0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Senza sapere nulla sulla sua genesi posso dire che la serie converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti se passo ai moduli trovo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ e a questa serie posso applicare il criterio del rapporto, cioè calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|x|^n}{n!} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie dei moduli converge

$\Rightarrow$ la serie conv. ass. ($\Rightarrow$ conv.).

ORA PERÒ TENGO CONTO DI COME È NATA LA SERIE.
SE USO IL RESTO DI LAGRANGE OTTENGO

$$\boxed{e^x = P_N(x) + R_N(x)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_N(x)$$

e $$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_{N,x})\, x^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{e^{\xi_{N,x}}\, x^{N+1}}{(N+1)!}$$

dove $\xi_{N,x}$ è un punto compreso tra 0 e x

Se fisso x e mando $N\to\infty$ ottengo che

$$|R_N(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{N+1}}{(N+1)!} \longrightarrow 0$$ perché il fattoriale va più veloce di $|x|^{N+1}$

DUNQUE $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

QUESTA SERIE CONVERGE MOLTO RAPIDAMENTE

PERCHÉ $\frac{1}{n!} \to 0$ molto rapidamente

Ad es. se $x = 1$, $\quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. CHE ERRORE COMMETTO SE SOMMO SOLO 10 TERMINI?

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \qquad n! = \overbrace{1 \cdot 2 \cdots n}^{n} \geq 2^{n-1}$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{10}} \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^{n-10}} = \frac{1}{2^{10}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-1/2}}_{=2} = \frac{1}{2^9}$$

RAGIONANDO NELLO STESSO MODO SI VEDE

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{N-1}}$$

DUNQUE $\quad 0 \leq e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{N-1}}$

Se $N = 10$ l'errore è $\leq \frac{1}{512}$

HO A DISPOSIZIONE DELLE STIME DELL'ERRORE

ANALOGAMENTE SI VEDE CHE

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{se } |x|<1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{Binomio di}\\ \text{Newton se}\\ \alpha \in \mathbb{N}\end{array}\right)$$

$$\text{dove } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{se } |x|<1$$

ci sarebbe un teorema generale:

<u>Teorema</u> Se $|f^{(n)}(x)| \leq M^n \quad \forall n \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

$\Rightarrow$ (usando il resto di Lagrange come fatto sopra)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(si può ricavare dalla def. $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$)

Se ci si mette nei complessi (diciamo per buono che tutto si fa nello stesso modo)

diventa chiaro la def di $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$.

Infatti, se deve essere

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(y) + i \sin(y)$$

$$i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \; ; \quad i^{2k+1} = i\,(i)^{2k} = (-1)^k i$$

IN REALTÀ POTREI DEFINIRE

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n}{m!} \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

Se $z = x \in \mathbb{R}$, questa definizione ha senso DATO CHE LO HO TROVATO CHE LA SERIE CONVERGE $\forall x \in \mathbb{R}$

SE FACCIO COSÌ DEVO POI VERIFICARE LE PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE:

$$e^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{0^m}{m!} = 1$$

$$e^{x+y} = e^{x+y} \; ??$$

Per dim. uso il prodotto di Cauchy

$$e^x \cdot e^y = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{m!}}_{a_n}\Big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^n}{m!}}_{b_n}\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{m!} = e^{x+y}$$

dove

$$c_n = \sum_{k=0}^{m} a_k \, b_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} (x+y)$$