Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentunesima lezione, 13 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Serie : (a_n) PROBLEMA: dire quale sia il "carattere" della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - cioè stabilire se la succ. delle somme parziali $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,

- È CONVERGENTE (serie CONVERGENTE)
- È DIVERGENTE (serie DIVERGENTE)
- NON HA LIMITE (serie INDETERMINATA)

• COND. NECESSARIA Serie convergente $\Rightarrow$ $a_n \to 0$

NON È SUFF. (per es. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, nonostante che $\frac{1}{n} \to 0$)

• CASO DEI TERMINI POSITIVI : $a_n \geq 0$. La serie non può essere indeterminata.

$\Rightarrow$ CRITERI DI CONVERGENZA :

• CRIT. CONFRONTO Se $0 \leq a_n \leq b_n$ e se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge.

• CONFRONTO ASINTOTICO Se $a_n, b_n \geq 0$, $a_n \simeq b_n$ cioè $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere

Stesso risultato se $a_n \simeq \ell\, b_n$, cioè se $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, con $0 < \ell < +\infty$.

Se invece $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ allora $\sum_n b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_n a_n$ conv.
$\cancel{\Leftarrow}$

- CRITERIO RADICE Se $a_n \geq 0$, se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Allora
$\ell < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge
$\ell > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge

(se $\ell = 1$ NON SI PUÒ DIRE NULLA).

- CRITERIO RAPPORTO Se $a_n > 0$, se esiste $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$\Rightarrow$ stessa conclusione del crit. radice.

SERIE NOTE:

Serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$
- converge a $\frac{1}{1-A}$ quando $|A| < 1$
- DIVERGE $A \geq 1$ (NON CONV.)
- INDETERM. $A \leq -1$ (NON CONV.)

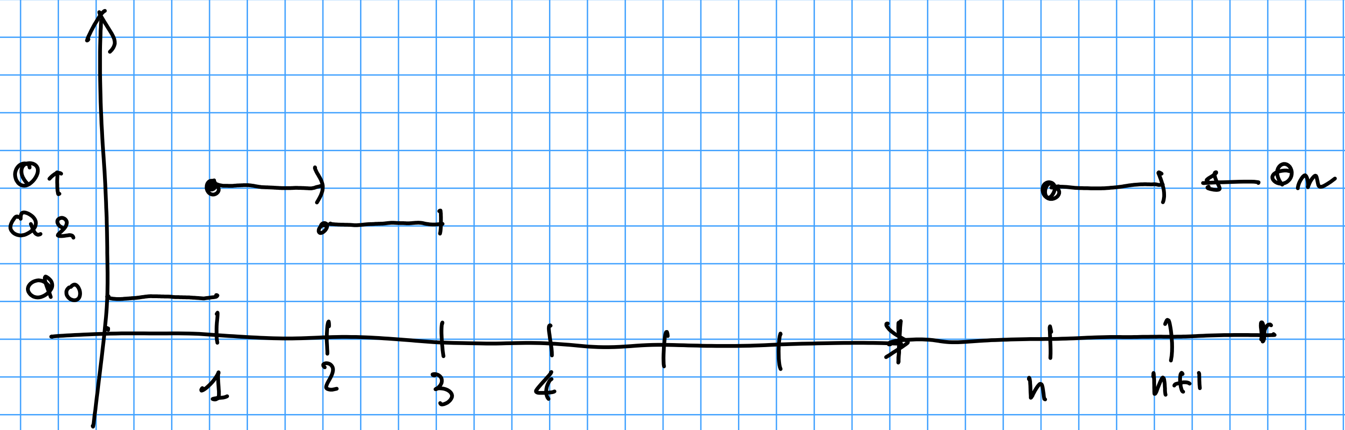
Serie armonica "generalizzata" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$
- CONVERGE se $\alpha > 1$
- DIVERGE se $\alpha \leq 1$

Altro esempio $\displaystyle\sum_{n=} \frac{1}{n \ln(n)^{\beta}}$ (lo vediamo dopo — è comp per l'integrale ...)

(CONV. $\Leftrightarrow$ $\beta > 1$)

$\uparrow$ suggerisce di trovare un collegamento con gli integrali impropri

IN EFFETTI dato $\{a_n\}$ successione posso costruire una funzione "a gradini" f, come segue: $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$



$f(x) := a_n$ per $n \leq x < n+1$ $\quad \left(f(x) = a_{[x]} \right)$

SI VEDE CHE

f è integrabile in s.i. su $[0 +\infty[$ $\Longleftrightarrow$ la serie $\sum_n a_n$ converge e vale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

DIM. Se f è integrabile $\Rightarrow$ esiste finito $I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_0^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(perché $\int_0^n f(x)\,dx = a_0 + a_1 + \dots + a_n = S_n$) ///

Dunque la serie converge e la somma della serie fa I.

VICEVERSA se so che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente so che

$\exists$ finito $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx$

NOTO CHE, se la serie converge, $a_n \to 0$. Questo implica

che $\lim_{b\to\infty} \int_{[b]}^b f(x) = \lim_{b\to\infty} a_{[b]} \cdot (b-[b]) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^{[b]} f(x)\,dx + \int_{[b]}^b f(x)\,dx \right) = S$$

Tende a S Tende a zero

Quindi f è integrabile e $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = S$.

Questa equivalenza "serie - integrale" permette di utilizzare i criteri per gli integrali impropri: per es. posso dim..

<u>Teorema</u> Sia f una funzione, $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ <u>decrescente</u>.

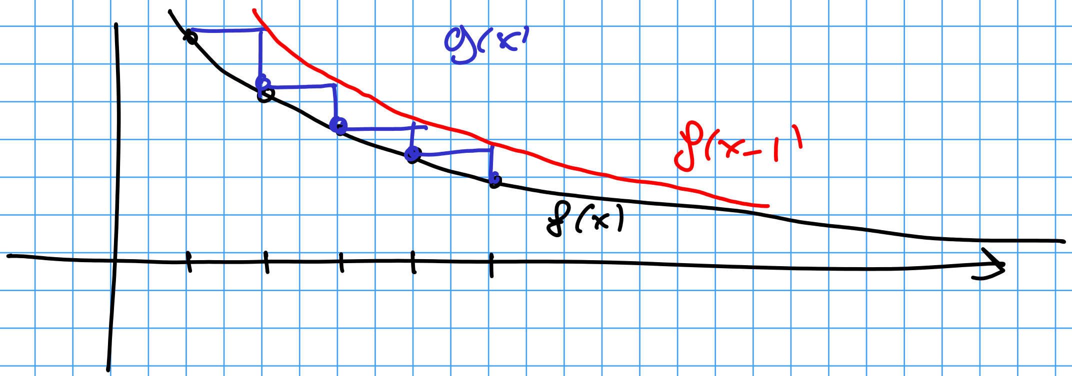
Pongo $a_n = f(n)$. Allora

$$\sum_n a_n \text{ convergente} \iff \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ è convergente}$$

<u>OSS.</u> Se f è decrescente $\Rightarrow$ esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
Allora se l'integrale è finito $\Rightarrow \ell = 0$. Possiamo quindi pensare solo al caso $\boxed{f \geq 0,\ f(x) \to 0 \text{ per } x \to +\infty}$

<u>Dim</u>: Prendo $g(x)$ la funzione a gradini associata ad a_n:

$$g(x) = f([x])$$



Si vede che $\boxed{f(x) \le g(x)}$ $\left(g(x) = f([x]) \ge f(x) \quad [x] \le x \quad f \text{ decrescente} \right)$

NE DEDUCO CHE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONV. $\iff \int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ CONV. $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV.

CONFRONTO (Tutto è ≥ 0)

Però so anche che $\underbrace{[x] \le x < [x]+1} \iff [x] > x-1$

da cui $g(x) = f([x]) < f(x-1)$ (← f traslata di 1 verso dx)

NE SEGUE CHE

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV. $\iff \int_1^{+\infty} f(x-1)\,dx$ CONV. $\underset{\text{(confronto)}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ CONV. $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ conv.

DUNQUE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONV. $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONV. #

<u>ESEMPIO</u> (quello di prima) $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ $\beta > 0$

se $x \geq 1$

Si vede che f è decrescente $\iff g(x) = x \ln^\beta(x)$ è crescente

infatti $g'(x)$ $\ln^\beta(x) + x \cdot \beta \ln^{\beta-1}(x) \cdot \frac{1}{x} = \ln^\beta(x) + \beta \ln^{\beta-1}(x) \geq 0$

se $x \geq 1$

Dunque, per il criterio appena visto, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\beta n}$ conv. $\iff$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^\beta(x)}\,dx$ converge $\iff \beta > 1$

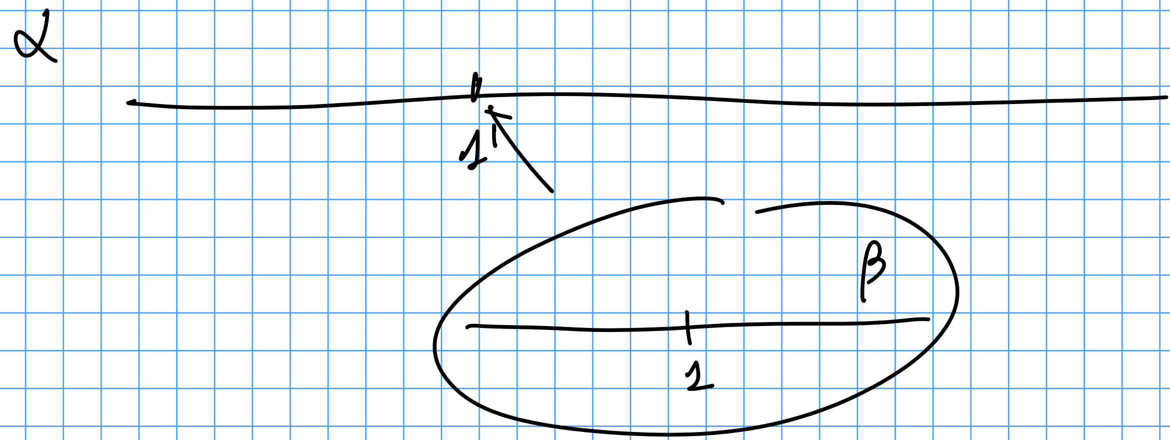
NATURALMENTE, il criterio appena fatto permette di decidere il comportamento della serie armonica:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ conv. $\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ conv $\iff \alpha > 1$

<u>NOTA</u> Se considero $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^\beta n}$ trovo gli stessi risultati

visto per $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$, cioè $\begin{cases} \text{CONV.} & \alpha > 1 \text{ oppure } \alpha = 1 \ \beta > 1 \\ \text{DIV.} & \alpha < 1, \text{ OPPURE } \alpha = 1 \ \beta \leq 1 \end{cases}$

Le serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\ln^\beta n}$ SONO "INTERMEDIE" TRA $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ per qualunque $\alpha > 1$.



Potrei anche prendere $\sum \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))^\gamma}$ $\begin{cases} \text{CONV.} & \gamma > 1 \\ \text{DIVERGE} & \gamma \leq 1 \end{cases}$

RIMANE DA DISCUTERE IL CASO DELLE SERIE CON TERMINI A SEGNO VARIABILE.

I CRITERI DISPONIBILI SONO GLI STESSI VISTI PER GLI INTEGRALI

Teorema Se $\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

Se introduco la def.: $\boxed{\sum_n a_n \text{ si dice assolutamente conv. quando } \sum_n |a_n| \text{ è convergente}}$

allora il teorema dice: $\sum_n a_n$ ass. conv. $\Rightarrow \sum_n a_n$ conv.

Teorema (criterio di Leibniz – SERIE A SEGNI ALTERNI)

Se a_n è una successione tale che:

(a) $a_n \geq 0$

(b) a_n decrescente ($a_{n+1} \leq a_n$)

(c) $a_n \to 0$

((a) è conseguenza di (b) + (c) ...)

ALLORA LA SERIE A SEGNI ALTERNI $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ CONVERGE

(il termine generale di questa serie è $(-1)^n a_n$)

$\boxed{(-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ PARI} \\ -1 & n \text{ DISPARI} \end{cases}}$

<u>Esempi</u>: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE (per Leibniz: $\frac{1}{n}$ DECRESCE E TENDE A ZERO)

MA <u>NON È</u> ASSOLUTAMENTE CONV. DATO CHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{che diverge}$$

Stesso discorso per $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ con $0 < \alpha \leq 1$

se invece $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ conv. assolutamente.

<u>Esempio</u> (CONCLUSIONE DI UN DISCORSO SUGLI INTEGRALI IMPROPRI)

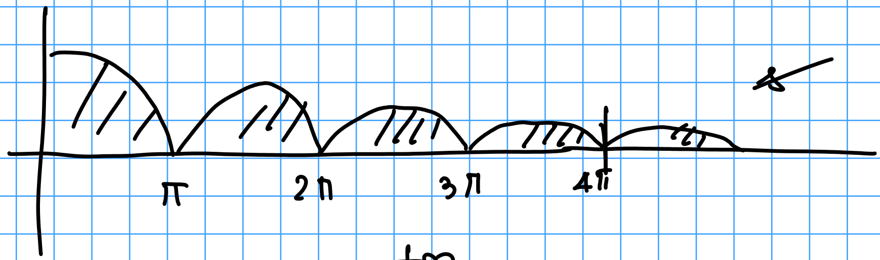
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \left(\text{è "l'equivalente" di } \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

È INT. IN SENSO IMPROPRIO SU $[0, +\infty[$

(CRITERIO DI ABEL - GIÀ VISTO!)

MA NON È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE CIOÈ:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x} \, dx = +\infty \qquad (\text{esiste perché l'integrando è } \geq 0)$$

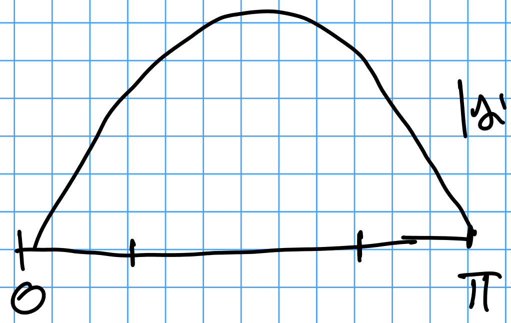


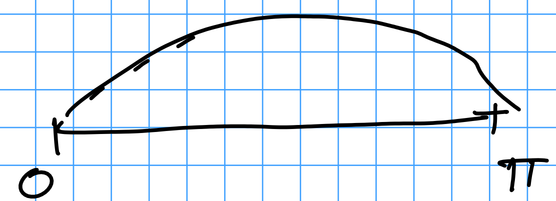
AREA INFINITA

IN EFFETTI $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx}_{a_n}$

chiamo $\displaystyle a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n\pi+y)|}{n\pi+y}\, dy =$

$(x = n\pi + y \;, \; dx = dy)$





$\displaystyle a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{n\pi+y}\, dx \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{(n+1)\pi}\, dy = \frac{1}{(n+1)\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi(n+1)}$

<u>DUNQUE</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(n+1)} = +\infty$!!

← serie armonica con $\alpha = 1$

Se non metto il modulo trovo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{n\pi + y}\, dy$$

Non è difficile vedere che $a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y)}{n\pi+y}\, dy$ decresce rispetto a n

$\Rightarrow$ per Leibniz la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ converge

(DIM. ALTERNATIVA DELLA CONVERGENZA DI $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

<u>Dim.</u> (criterio della conv. assoluta)

Se $\sum_n |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n$ conv.

<u>I° MODO</u> Devo dim. che $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è convergente.

Considero $a_n = a_n^+ - a_n^-$ / $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

Dato che $|a_n| \geq a_n^+ \geq 0$ / $|a_n| \geq a_n^- \geq 0$ deduco

$$\sum_n |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_n a_n^+ < +\infty \quad E \quad \sum_n a_n^- < +\infty$$

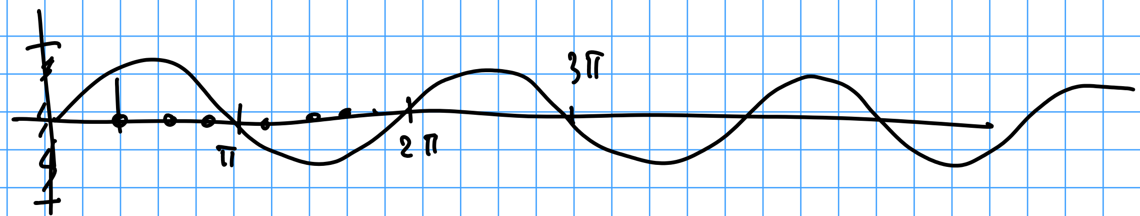
(criterio del confronto per serie a termini positivi). Ma allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^- \longrightarrow \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$$

II° Potevamo passare alle funzioni a gradini e applicare il criterio per gli integrali

ESEMPIO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{1+n^3}$

NOTA il termine $\sin(n)$ cambia segno in "MODO IMPREVEDIBILE"



~ π è irrazionale, non va d'accordo con gli interi . . . .

(SI POTREBBE VEDERE CHE $\sin(a n)$ "si ripete" $\iff \frac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$

Se $\frac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ allora i valori $\sin(an)$ sono "DENSI" IN $[-1,1]$

(ne trovo in qualunque intervallo di ampiezza positiva dentro $[-1,1]$)

POSSO RAGIONARE COSÌ

$a_n = \frac{\sin(n)}{1+n^3}$. Vedo che $|a_n| = \frac{|\sin(n)|}{1+n^3} \leq \frac{1}{1+n^3} \leq \frac{1}{n^3} = b_n$

Per il criterio del confronto, essendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$ $(\alpha = 3 > 1)$

ottengo che $\sum_n |a_n| < +\infty$.

Per la conv. assoluta anche $\sum_n a_n$ CONVERGE