Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Trentesima lezione, 31 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Osservazioni: Dal criterio di Abel segue che se

$$f(x) = a(x)\sin(\alpha x) \qquad \alpha>0$$

e $a' \le 0$, (a derivabile)

$\Rightarrow$ f è integrabile "all'infinito" in senso improprio

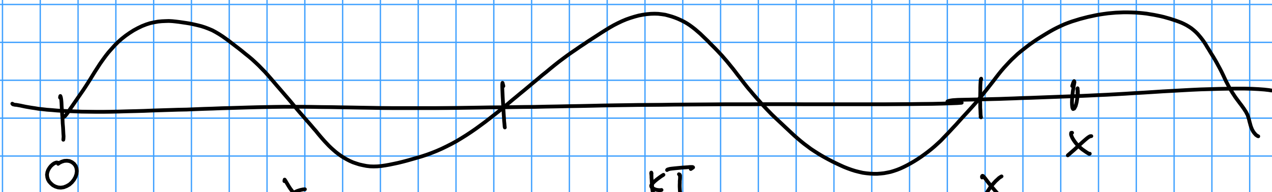
PIÙ in generale, la stessa conclusione vale se

$$f(x) = a(x)\, b(x)$$

con $a' \le 0$ $\qquad$ b periodica di un periodo $T>0$

e $\int_0^T b(t)\,dt = 0$

Infatti, se b ha queste proprietà, $\Rightarrow$ $B(x) = \int_0^x b(t)\,dt$ è limitata, dato che se $kT \le x < (k+1)T$



$B(x) = B(\underbrace{x-kT}_{\in [0,T[})$ perché $\int_0^x b(t)\,dt = \int_0^{kT} b(t)\,dt + \int_{kT}^x b(t)\,dt$

$$\int_0^{kT} b(t)\,dt = \int_0^T b(t)\,dt + \int_T^{2T} b(t)\,dt + \dots + \; = 0$$

$$= \int_{KT}^{x} b(t)\,dt \qquad t = KT + s \quad , \; dt = ds$$

$$= \int_0^{x-KT} b(KT+s)\,ds = \int_0^{x-KT} b(s)\,ds = B(x-KT)$$

(se b è T-periodico e $\int_0^T b(t)\,dt \Rightarrow$ $\Rightarrow B(t)$ è T periodico, in particolare B è limitata).

DUNQUE POSSO APPLICARE ABEL ($\Rightarrow \int_0^{+\infty} a(x)\,b(x)\,dx$ CONVERGE)

ESEMPIO $\quad f(x) = \sin(x^{\alpha}) \quad$ per $\alpha > 0$

Mi chiedo se f è integrabile all'infinito, cioè se $\int_0^{+\infty} \sin(x^{\alpha})\,dx$ converge. Uso $x^{\alpha} = y \iff x = y^{1/\alpha}$ $\quad dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dy$

L'integrale diventa $\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \sin(y)\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dy \leftarrow$ rientro nel

(dovrei scrivere $\lim_{c \to +\infty} \int_0^{c} \sin(x^{\alpha})\,dx = \lim_{c \to \infty} \frac{1}{\alpha}\int_0^{c^{\alpha}} \sin(y)\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dy =$

$\lim_{d \to \infty} \int_0^{d} \sin(y)\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dy$)

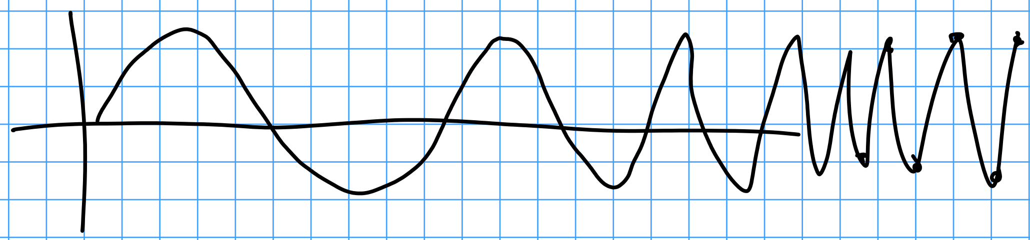
criterio di Abel se $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0 \iff \alpha > 1$.

DUNQUE $\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,dx$ converge per tutti gli $\alpha > 1$

(non dice nulla per gli $\alpha \le 1$)

Per esempio $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge. <u>NOTIAMO</u> che

$\sin(x^2)$ <u>NON TENDE A ZERO</u> (come ci si potrebbe aspettare)



(in qualche modo i pezzi positivi e quelli negativi si compensano)

DUNQUE f INTEGRABILE A $+\infty$ $\Rightarrow$ $f \to 0$ a $+\infty$

È FALSO IN GENERALE

<u>PERÒ</u>

<u>Teorema</u> Se esiste $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, e $f(x)$ è integrabile in senso improprio su $[0,+\infty[$ $\Rightarrow$ $\ell = 0$

<u>DIM.</u> Se fosse $\ell > 0$ $\Rightarrow$ $\exists\ \bar{x}$ tale che $\forall x \geq \bar{x}$ $f(x) \geq \ell/2$

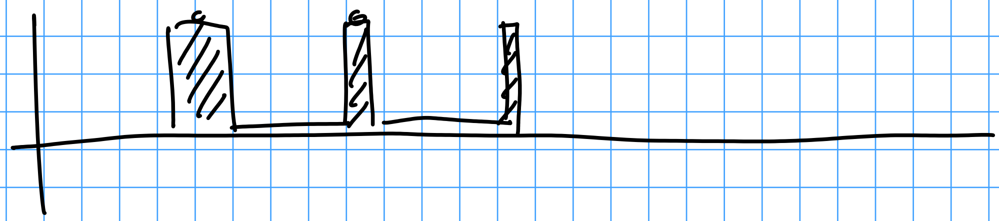
$$\Rightarrow \int_0^c f(x)\,dx = \int_0^{\bar{x}} f(x)\,dx + \int_{\bar{x}}^c f(x)\,dx \geq \int_0^{\bar{x}} f(x)\,dx + \frac{l}{2}(c-\bar{x})$$

$$\downarrow$$

$$+\infty$$

ne segue che $\lim_{c \to +\infty} \int_0^c f(x)\,dx = +\infty$ (l'integrale diverge)

stesso discorso se $l < 0$



SERIE

("strettamente "imparentate" con $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$)

Idea: sommare tutti gli infiniti elementi di una successione

Def. Data una successione $\{a_n\}$ costruisco la successione

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

detta succ. delle "somme parziali / ridotte" di $\{a_n\}$.

DIRÒ CHE

- $\{a_n\}$ è SOMMABILE / la serie degli $\{a_n\}$ è CONVERGENTE se esiste finito $\lim_{n\to\infty} S_n$

In questo caso chiamo SOMMA della serie degli $\{a_n\}$ tale limite e lo indico con $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)$

Per la verità, nella pratica, si usa il termine "serie" sia per la succ. $\{S_n\}$, che per la sua somma

Attenzione a non confondere la convergenza della serie (degli $\{a_n\}$) con la convergenza degli $\{a_n\}$

- La serie degli $\{a_n\}$ è DIVERGENTE se $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ o $-\infty$.

- La serie degli $\{a_n\}$ è INDETERMINATA se non esiste $\lim_{n\to\infty} S_n$.

<u>Teorema</u> Se la serie degli $\{a_n\}$ è convergente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(CONDIZIONE NECESSARIA perché una serie converga è che il termine n-esimo tenda a zero per $n\to\infty$)

DIM. Poniamo $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Se $S_n \to S$, per le proprietà dei limiti, anche $S_{n-1} \to S$ (questioni relative alle sottosuccessioni). Se $S \in \mathbb{R}$, ne deduco che

$$S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$$

. MA $S_n - S_{n-1} = a_n$

$(a_0 + \dots + a_n - (a_0 + \dots + a_{n-1}) = a_n)$. Quindi $a_n \to 0$.

VEDREMO FRA POCO CHE LA CONDIZIONE NON È SUFF.

Esempi vari

Serie geometrica Data $A \in \mathbb{R}$ (RAGIONE) considero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Che "carattere" ha tale serie?

Noto che POSSO CALCOLARE ESPLICITAMENTE le somme parziali

$$\underbrace{A^0 + A^1 + \dots + A^n}_{S_n \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)} = (1-A)(1+A+\dots A^n) \cdot \frac{1}{1-A} \quad e$$

SE $A \neq 1$

$$(1-A)(1+A+\dots+A^n) = 1+\cancel{A}+\cancel{A^2}+\dots+\cancel{A^n} - \cancel{A}-\cancel{A^2}-\dots-\cancel{A^n}-A^{n+1} = 1-A^{n+1}$$

SE $A \neq 1$

Quindi $\boxed{S_n = \dfrac{1-A^{n+1}}{1-A}}$, Se ne faccio il limite trovo

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \begin{cases} \text{CONVERGE A } \dfrac{1}{1-A} & \text{se } |A|<1 \quad (A^{n+1} \to 0) \\ \text{DIVERGE A } +\infty & \text{se } A > 1 \ (\geq) \quad (A^{n+1} \to \infty) \\ \text{INDETERMINATA} & \text{se } A \leq -1 \quad (A^{n+1} \text{ NON HA LIMITE}) \end{cases}$$

Nel caso $A=1$ vedo che $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \to \infty$

DIVERGE ANCHE PER $A=1$

La serie geometrica di ragione A converge $\Longleftrightarrow$ $\boxed{-1 < A < 1}$

(corrisponde a $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$.)

Nel caso della serie geometrica il termine $a_n = A^n$ $(|A|<1)$ TENDE A ZERO MOLTO RAPIDAMENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

NOTA CHE $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \quad \left(= \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)} \right)$

$$\Rightarrow \text{se } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \cancel{\sum_{k=2}^{n}} \frac{1}{k} - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n}} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \qquad \sum_{h=2}^{n+1} \frac{1}{h} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$. DUNQUE $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

PIÙ IN GENERALE se $a_n = b_n - b_{n+1}$ con $b_n \to 0$

RIFACENDO GLI STESSI CALCOLI VEDO CHE

$$S_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_4}) + \dots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

$\rightarrow b_1$

UNA SERIE DI QUESTO TIPO SI DICE "TELESCOPICA"

di una tale serie è facile trovare la somma.

ESEMPIO (di una serie divergente)

$a_n = \ln(1 + 1/n)$ $\rightsquigarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+ 1/n)$??

(NOTA CHE $a_n \simeq \frac{1}{n}$, dato che $\ln(1+x) = x + o(x)$ — IN PARTICOLARE $a_n \to 0$)

ANCHE QUESTA SERIE È TELESCOPICA DATO CHE

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \longrightarrow +\infty$$

DUNQUE QUESTA SERIE DIVERGE (anche se $a_n \to 0$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica). TALE <u>SERIE DIVERGE</u>

Questo si può dedurre dal "confronto" con $\ln(1+1/n)$; OPPURE (LO VEDIAMO DOPO).

applicando la definizione, e facendo dei conti sulle somme parziali:

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

Considero $n =$ potenze di 2, $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

$$S_{2^k} = \underbrace{1}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{= 1/2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq$$

$$1 + \frac{1}{2} k$$

DUNQUE $\lim_{k \to \infty} S_{2^k} = +\infty \Rightarrow$ DI SICURO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ NON CONV.

(se convergesse a una somma finita S, dovrebbe essere $S_n \to S$ $\Rightarrow S_{2^k} \to S$)

Però è chiaro che S_n è crescente, visto che $a_n \geq 0 \Rightarrow$ S_n ha limite $S \in [0, +\infty]$. Visto che $S_{2^k} \to +\infty \Rightarrow S = +\infty$

cioè la serie <u>diverge</u>.

Questo calcolo mostra che $S_n \simeq \ln(n)$ $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \ln n \right)$

ANCHE NEL CASO DELLE SERIE GIOCA UN RUOLO PARTICOLARE IL CASO $a_n \geq 0$: IN QUESTO CASO LA SERIE $\sum_n a_n$ HA SENSO COMUNQUE, POTENDO ESSERE INFINITA:

<u>FATTO</u> Se $a_n \geq 0$ esiste (eventualmente infinito)

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M} a_k \quad \left(\in [0,+\infty]\right)$$ PERCHÉ $S_M = \sum_{k=0}^{M} a_k$ <u>è crescente</u>

Le serie a termini positivi NON POSSONO ESSERE INDETERMINATE: posso comunque considerarne la somma (eventualmente infinita)

PER QUESTE SERIE CI SONO DEI "CRITERI DI CONVERGENZA"

<u>CRITERIO DEL CONFRONTO</u> Se $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n$ (o per n grande). Allora

se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (DA CUI

se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge)

DIM. (1) le due somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ esistono in $[0, +\infty]$ (perché $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (perché $a_n \leq b_n$)

Se ne deduce che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ /

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

#

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO Se $a_n \geq 0$ $b_n \geq 0$ (basta definitivamente) e se $a_n \simeq b_n$ (cioè $\frac{a_n}{b_n} \to 1$)

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

· stesso risultato se $a_n \simeq \ell b_n$ con $\ell \in]0, +\infty[$

cioè se $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$ con $\ell \in]0, +\infty[$

· Se invece $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ ho

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

DIM. Se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, allora per n grande

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2 \iff \frac{b_n}{2} \leq a_n \leq 2b_n$$

Applicando il confronto ottengo la tesi.

Nel caso $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ ho solo la dis. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ n grande

$\iff$ $a_n \leq b_n$ per n grande

Nel caso di termini positivi si ha:
termini asintotici $\Rightarrow$ stesso carattere delle rispettive serie

---

ESEMPIO (voglio studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 0$)

Considero $\beta \in \mathbb{R}$ e $a_n = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}$

Chiaramente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è TELESCOPICA e quindi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right) = \frac{1}{1^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = 1 - \frac{1}{(n+1)^\beta}$$

Quindi la serie converge $\iff \beta > 0$

(la seconda serie che abbiamo visto corrisponde a $\beta = 1$)

A cosa è asintotico a_n?

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{(n+1)^\beta}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta - 1\right] = \frac{1}{(n+1)^\beta}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - 1\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^\beta}\left[\cancel{1} + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right] \simeq \frac{\beta}{n}\,\frac{1}{(n+1)^\beta} \simeq \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$$

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta \to 1\right)$$

$\beta \neq 0$

Dunque $\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \simeq \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$ . . Applicando il confronto asintotico ottengo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta+1}} \quad \text{converge se } \beta > 0 \ / \ \text{diverge se } \beta < 0$$

$\iff$ La serie "armonica generalizzata" (di esponente α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$, diverge se $\alpha < 1$

Se aggiungo quanto visto prima nel caso $\alpha=1$, trovo

DA RICORDARE

$$\boxed{\sum_{n=0} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{CONVERGE} \iff \alpha > 1} \quad (\text{diverge se } \alpha \leq 1)$$

(corrisponde a $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$ che converge $\iff \alpha > 1$)

La serie armonica è il "termine di confronto" che si usa più frequentemente!

ESEMPIO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2-7}{n^4+\sin(n)}$ DIVERGE

perché $\displaystyle\frac{n^3+n^2-7}{n^4+\sin(n)} \simeq \frac{1}{n}$

MENTRE $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2-7}{n^5+\sin(n)}$ CONVERGE

perché $\displaystyle\frac{n^3+n^2-7}{n^5+\sin(n)} \simeq \frac{1}{n^2}$

Confronto con la serie armonica

IN ALTRI CASI TORNA COMODO UN CONFRONTO CON LA SERIE GEOMETRICA

(in questi casi si potrebbe comunque confrontare con la serie armonica ma può essere più complicazione)

C'È UN CRITERIO "PRONTO" CHE DICE:

CRITERIO (DELLA RADICE) • Se $a_n \geq 0$, se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ con $\ell < 1$ $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

• Se $a_n \geq 0$, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, con $\ell > 1$ $\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DIVERGE

DIM. Sia $0 \leq \ell < 1$, Prendo $\ell' = \frac{1+\ell}{2}$ $\Rightarrow$ $\ell < \ell' < 1$

Per le proprietà dei limiti ho:

$$\sqrt[n]{a_n} < \ell' \quad \text{per } n \text{ grande}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n \leq (\ell')^n \quad \text{per } n \text{ grande}$$

HO TROVATO UN CONFRONTO TRA $\sum_n a_n$ e $\sum_n (\ell')^n$

Dato che $\ell' < 1$ $\Rightarrow$ $\sum_n (\ell')^n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge

Se invece $\ell > 1$ prendo $\ell' = \frac{1+\ell}{2} \Rightarrow 1 < \ell' < \ell$

$\Rightarrow$ $\sqrt[n]{a_n} \geq \ell'$ per n grande

$\Updownarrow$

$a_n \geq (\ell')^n$ per n grande

(nell'altro verso rispetto al caso precedente)

ho un confronto tra $\sum_n a_n$ e $\sum_n (\ell')^n$ $(\ell' > 1)$

Dato che $\sum_n (\ell')^n$ diverge $\Rightarrow \sum_n a_n$ diverge. #

ESEMPIO $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$. Provo con il criterio della radice

Devo calcolare $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2} = \frac{1}{2}$

(ricordiamo che $\sqrt[n]{n} \to 1$!!). Dato che $\frac{1}{2} < 1$

il criterio della radice implica che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ converge

(AVREI POTUTO CONFRONTARE CON $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{n^3}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^5}{2^n} \to 0 \quad , \text{ applico il confronto } \ldots \Big)$$

ESEMPIO $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; provo il criterio della radice.

Devo calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$

MI RICORDO CHE $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}$ (CESARO)

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$. DUNQUE $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} \to \frac{2}{\infty} = 0$

$\Rightarrow$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge

NOTA il fatto che $\sqrt[n]{a_n} \to 0$ dice che $a_n \to$ PIÙ VELOCEMENTE DI QUALUNQUE SERIE GEOMETRICA A^n con $A<1$

USANDO CESARO, POSSIAMO ANCHE DIMOSTRARE

CRITERIO DEL RAPPORTO Se $a_n > 0$ e se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \quad \text{con } \ell < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Se invece $\ell > 1$ la serie diverge.

(Lo stesso segue da $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ ...)

ESEMPIO • Se considero di nuovo $\sum \frac{2^n}{n!}$ posso fare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Uso il rapporto e calcolo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \quad \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \right)$$

$\implies$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge

OSS Se nel criterio della radice (o del rapporto) trovo $\ell = 1$

NON POSSO DIRE NULLA. Se infatti provo il criterio della radice sulla serie armonica $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, TROVO

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \rightarrow 1^\alpha = 1 \quad \text{PER QUALUNQUE } \alpha$$

Quindi con questo criterio <u>non distinguo</u> il caso $\alpha > 1$ (serie convergente) dal caso $\alpha \leq 1$ (serie divergente)