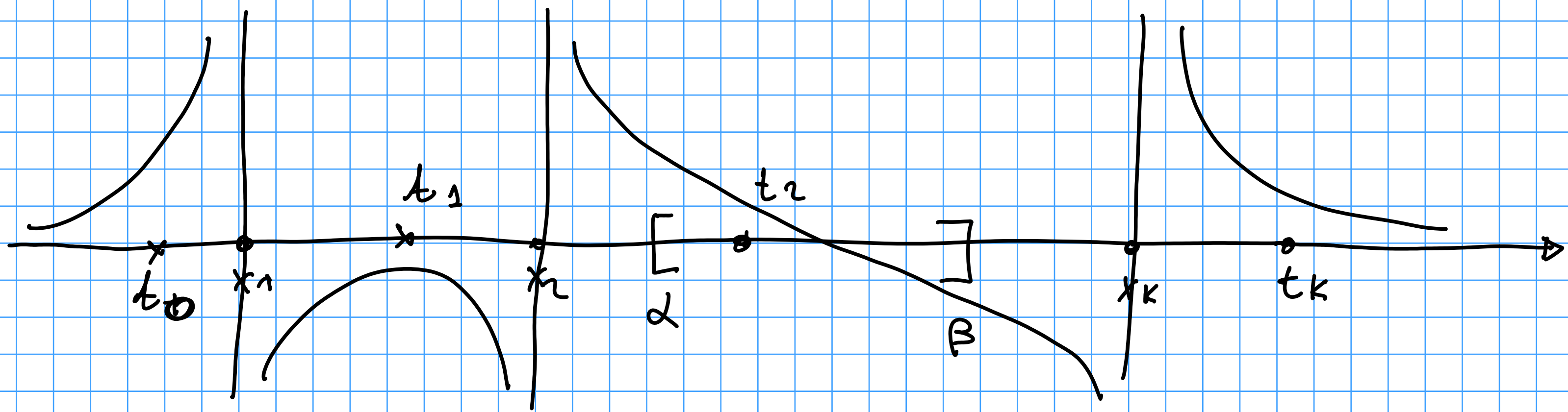
Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventinovesima lezione, 30 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

INTEGRALI IMPROPRI : CASO GENERALE



I intervallo di estremi a e b con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Dentro I ci sono K punti $x_1 < x_2 < \dots < x_K$

Pongo $I^* = I \setminus \{x_1, x_2, \dots x_K\}$, considero una funzione

$f : I^* \to \mathbb{R}$, tale che f sia integrabile secondo

Riemann su ogni $[\alpha, \beta] \subset I^*$ (ogni $[\alpha, \beta]$ contenuto

in I, che non contenga nessuno degli $x_1 \dots x_K$)

– PER ESEMPIO f continua su I^*

DICO CHE f è integrabile in senso improprio su I^*

se presi (arbitrariamente) $t_0 < t_1 < \dots t_K$

tali che $\underbrace{t_0 < x_1 < t_1 < x_2 < \dots < t_{k-1} < x_k < t_k}$

la f è integrabile in senso improprio su ognuno degli intervalli:

$]a, t_0[$, $]t_0, x_1[$, $]x_1, t_1[$, $]t_1, x_2[\dots]t_{k-1}, x_k[$

$]x_k, t_k[$, $]t_k, b[$

Chiamo INTEGRALE di f su I^* la somma degli integrali di f su ognuno di questi intervalli.

(è chiaro che questo non dipende dalla scelta dei t_i purché rispettino la condizione $\underbrace{\quad}$)

Per indicare tale integrale scriverò $\left(\int_{I^*} f(x)\,dx =\right) \int_a^b f(x)\,dx$

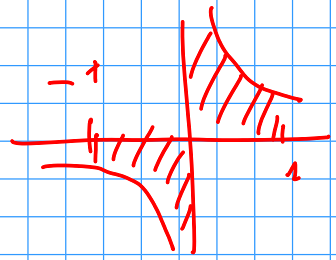
OSS. Nel caso in cui c'è solo 1 punto $x_1 \in]a, b[$

COMUNQUE $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^b f(x)\,dx$

e si chiede che ENTRAMBI i due addendi esistano finiti (NON POSSO "COMPENSARE" i valori a destra di x_1 con quelli a sinistra: per esempio

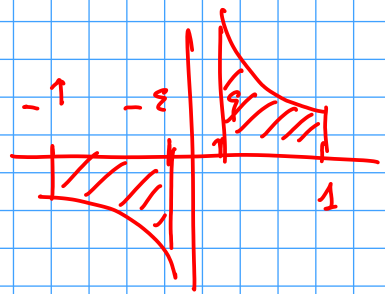
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ NON ESISTE dato che nessuno fra i due integrali $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx$ e $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ è finito

$(-\infty)$ $(+\infty)$



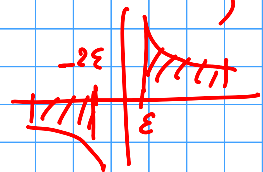
IN ALTRI CONTESTI SI DEFINISCE

(*) $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \right) = 0$$



NON È LA NOSTRA DEF.

Perché la def. (*) DIPENDE SOSTANZIALMENTE dal fatto di togliere un intervallo simmetrico; se facessi invece:



$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-2\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\left[\ln|x| \right]_{-1}^{-2\varepsilon} + \left[\ln|x| \right]_{\varepsilon}^{1} \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln 2\varepsilon - \ln \varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(2) = \ln(2) \neq 0$$

$\sim$ QUESTO TIPO DI DEFINIZIONI È "INSTABILE"

Se invece considero una f integrabile nel senso della all'inizio su $]-1,1[\setminus\{0\}$, allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{-a\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{b\varepsilon}^{1} f(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

qualunque siano a e b

CON LA NOSTRA DEFINIZIONE DEVONO ESISTERE FINITI "TUTTI I PEZZI"

Esempio

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x^{\alpha}(1+x^3)}$$

(NOTA CHE $f(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$)

Mi chiedo per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione sia integrabile su $]0, +\infty[$

CI SONO $\underline{\underline{2}}$ punti in cui va discussa l'integrabilità in senso improprio, cioè $x=0$, e $x=+\infty$.

In effetti f è continua su $]0,+\infty[$ $\Rightarrow$ per ogni a, b tali che $0<a<b<+\infty$ f è int. su $[a,b]$

QUINDI

f int. (s. improprio) su $]0+\infty[$ $\Leftrightarrow$ f int. s. impr. su $]0,1]$ e su $[1,+\infty[$ CONTEMPORANEAMENTE!

$$\boxed{f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x^2(1+x^3)}}$$

(1) VEDIAMO L'INTEGRABILITÀ su $]0,1]$.

Userò il criterio del confronto asintotico cercando una funzione $g(x)$ (più semplice) che sia asintotica a $f(x)$ per $x \to 0^+$

Dato che $1+x^3 \to 1$ è chiaro che

$$f(x) \simeq \frac{1-e^{-x}}{x^2} \simeq \frac{x}{x^2}$$

(Dato che $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ $\Leftrightarrow$ $1-e^{-x} \simeq x$)

Quindi se $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ viene $f(x) \simeq g(x)$

DUNQUE $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx \iff \alpha - 1 < 1$

$\iff \boxed{\alpha < 2}$

(2) VEDIAMO L'INTEGRABILITA' su $[1, +\infty[$. Se $\underline{x \to +\infty}$

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x^{\alpha}(1+x^3)} \simeq \frac{1-e^{-x}}{x^{\alpha}\,x^{3}} = \qquad \left(\frac{x^3}{1+x^3} \to 1\right)$$

$$\simeq \frac{1}{x^{\alpha}x^{3}} \qquad \left(e^{-x} \to 0\right)$$

Quindi se prendo $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha+3}}$ ho

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+3}}\,dx$ conv. $\iff \alpha + 3 > 1$

$\iff \boxed{\alpha > -2}$

IN DEFINITIVA $f(x)$ è integrabile su $]0, +\infty[\iff \boxed{-2 < \alpha < 2}$

OSS. Nell'es. precedente il termine $\frac{e^{-x}}{x^\alpha(1+x^3)} = f_1(x)$ integrabile su $[1, +\infty[$ PER OGNI VALORE DI α

dato che e^{-x} "VINCE" su ogni polinomio.

Per vederlo posso scrivere:

$$\boxed{\frac{e^{-x}}{x^\alpha(1+x^3)} \, x^2} \, \frac{1}{x^2}$$

$\downarrow$ se $x \to +\infty$

0

, cioè $f_1(x) = \frac{1}{x^2} g_1(x) =$

con $g_1(x) \to 0$ per $x \to +\infty$

e applicare il confronto asintotico "con $\ell = 0$".

$$\left(g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = g_1(x) \to 0 \right)$$

OSS. $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} \, dx$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha < 1$

(COME NEL CASO $x_0 = 0$)

e lo stesso vale per $\int_{x_0-1}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx$

$\left(\text{e quindi per } \int_{x_0-1}^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx \right).$

BASTA SOSTITUIRE $y = x - x_0$ e PASSARE A $\int_0^1 \frac{1}{y^\alpha}\,dy$

o $\int_{-1}^{0} \frac{1}{|y|^\alpha}\,dy$.

Per esempio

$$\int_0^\pi \frac{(\sin(x))^{1/2}}{x-\pi}\,dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin(x)}}{x-\pi}\,dx$$

IN QUESTO CASO $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{x-\pi}$ è "singolare"

in $x = \pi$. Va anche notato che $\sin(x) \to 0$ per $x \to \pi$

(se non fosse $\sqrt{\sin(x)}$ la funzione avrebbe integrale divergente

dato che $\frac{1}{x-\pi} = \frac{-1}{|x-\pi|^\alpha}$ con $\alpha = 1$)

PER VEDERE "L'ORDINE" CON CUI $\sqrt{\sin(x)} \to 0$ in $x = \pi$

POSSO (1) sviluppare $\sin(x)$ in $x_0 = \pi$. TROVO

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, che vale -1 x $x=\pi$ $\Rightarrow$

$$\sin(x) = \sin(\pi) + (-1)(x-\pi) + o(x-\pi) = \pi - x + o(\pi - x)$$

IN ALTRI TERMINI $\sin(x) \simeq \pi - x$ per $x \to \pi$

DUNQUE $\frac{\sqrt{\sin(x)}}{x-\pi} \simeq \frac{\sqrt{\pi - x}}{x - \pi} = -\frac{1}{\sqrt{\pi - x}} = -\frac{1}{|x-\pi|^{1/2}}$

che è integrabile essendo $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Oppure (2) potrei scrivere $\sin(x) = -\sin(x-\pi)$

$\simeq -(x-\pi)$ (perché $\sin(t) = t + o(t)$), e poi

continuo come prima. (trucco per ricondursi a zero).

ALTRO ESEMPIO

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

Qui $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}$ è continua su $]0,1[$. Devo

considerare $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ e $\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ separatamente.

(1) $\boxed{x \to 0^+}$ In questo caso

$f(x) \simeq \ln(x)$ (dato che $\sqrt{1-x} \to 1$)

Dato che $\int_0^{1/2} \ln(x)\,dx$ esiste finito anche $\int_0^{1/2} f(x)dx$

esiste finito!

(2) $\boxed{x \to 1^-}$ Per trattare questo caso devo studiare

cosa fa $\ln(x)$ per $x \to 1$

Sviluppiamo $\ln(x)$ in $x = 1$. Dato che

$$\ln(1) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \quad \left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = 1 \quad \Rightarrow \ln(x) = (x-1) + o(x-1)$$

cioè $\ln(x) \simeq x-1 \Rightarrow f(x) \simeq \frac{x-1}{(1-x)^{1/2}} \overset{(x<1)}{=} -(1-x)^{1/2}$

$\to 0$ se $x \to 1^-$ (si potrebbe anche usare Hôpital per dire che $\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}} = 0$)

DUNQUE f si può prolungare a una funzione continua in $x = 1$ $\Rightarrow$ f è int. secondo Riemann su $[1/2, 1]$

$\Longrightarrow$ f è int. in senso improprio su $]0,1]$

RICORDO CHE $f(x) = g(x) + o(g(x)) \iff f(x) \simeq g(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} \to 1 \right)$$

ALTRI ESEMPI "importanti"

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \, dx \qquad \alpha, \beta \text{ parametri reali}$$

(se $\beta = 0$ si torna a $\frac{1}{x^\alpha}$, già visto)

Dato che $\ln(x) \to +\infty$ se $x \to \infty$, allora se $\beta > 0$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ dovrebbe "essere meglio" di $\frac{1}{x^\alpha}$

(se $\beta < 0$ allora è "peggio").

CASO 1 $\alpha > 1$ $\left(\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \text{ CONVERGE} \right)$, ALLORA

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}\, dx$$ CONVERGE QUALUNQUE SIA β

(è interessante $\beta < 0$)

INFATTI se $\alpha > 1$ posso trovare α' tale che

$1 < \alpha' < \alpha$ (per es. $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$)

e dunque $$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha'}} \, \frac{1}{x^{(\alpha-\alpha')} \ln^\beta(x)}$$

POSITIVO

e per le proprietà di $\ln(x)$ so che $x^{\boxed{\alpha-\alpha'}} \ln^\beta(x) \to +\infty$

qualunque sia β.

$x^{\alpha-\alpha'} \to +\infty$

$\ln^\beta(x) \xrightarrow{\beta>0} +\infty$

$\ln^\beta(x) \xrightarrow{\beta<0} 0$

e quindi $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha'}} \cdot e(x)$

con $e(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Per il confronto asintotico (versione con $\ell = 0$) $\Rightarrow$ f è integrabile

(2) Se $\alpha < 1$ l'integrale <u>diverge</u> qualunque sia β.

(qui è interessante $\beta > 0$)

In questo caso prendo α' in modo che $\alpha < \alpha' < 1$ (per es. $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$) e scrivo

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha'}} \frac{1}{x^{\alpha-\alpha'} \ln^\beta(x)} = \frac{1}{x^{\alpha'}} \underbrace{\frac{x^{\alpha'-\alpha}}{\ln^\beta(x)}}_{\text{DIVERGE}}$$

$(\underline{\alpha' - \alpha > 0})$. QUINDI

$$f(x) = \frac{Q(x)}{x^{\alpha'}}$$ con $Q(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$ (sempre per le proprietà di $\ln(x)$)

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ <u>diverge</u>. $\left(\frac{1}{x^{\alpha'}}\right.$ DIVERGE, $\left.Q(x) \to +\infty\right)$

(3) (INTERESSANTE) $\alpha = 1$. In questo caso $\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x}$ ha integrale divergente. PERÒ la presenza di $\ln^\beta(x)$ con $\beta > 0$ può CAMBIARE LE COSE. IN EFFETTI

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln^\beta(x)}\,dx$$ si presta alla sostituzione $y = \ln(x)$ $\Leftrightarrow$ $dy = \frac{dx}{x}$ che porta a

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta}\,dy$$ CONVERGE $\Leftrightarrow$ $\underline{\beta > 1}$

RIASSUMENDO

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$$ CONVERGE SE E SOLO SE $\boxed{\alpha > 1 \text{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1}$

(diverge se $\alpha < 1$ oppure $(\alpha = 1)$ e $(\beta \leq 1)$)

FINO AD ORA ABBIAMO CONSIDERATO FUNZIONI ≥ 0
(o che non cambiano segno se $x \to x_0$)

COSA SI PUÒ FARE SE CADE TALE IPOTESI

PER ES. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ su $[1, +\infty[$

(qui $\sin(x)$ cambia continuamente segno se $x \to \infty$)

<u>CRITERIO</u> (DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA)

Sia $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann su ogni $[c,b]$ con $c > a$. Se $|f|$ è integrabile in senso improprio su $]a, b]$ $\left(\text{cioè } \lim_{c \to a^+} \int_{c}^{b} |f(x)|dx \text{ esiste finito} \right)$

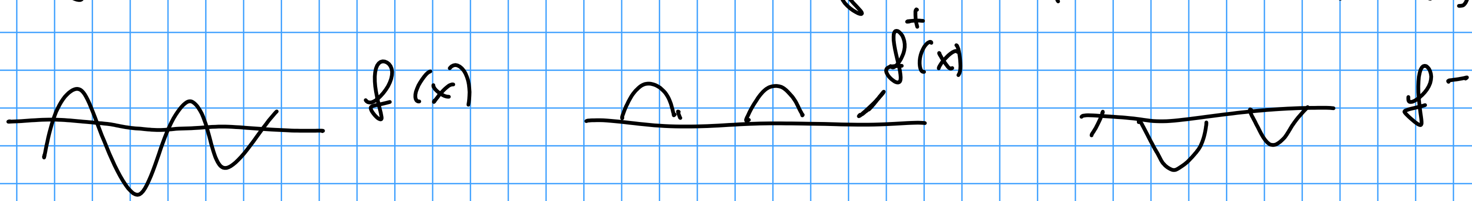
allora anche f è integrabile in senso improprio su $]a,b]$.

(VANTAGGIO DI RICONDURSI A $|f|$!! $|f|$ è ≥ 0 e quindi posso usare i criteri di prima.

DIM.. Data f considero

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

(f^+ e f^- sono int. secondo Riem. su ogni $[c, b] \subset]a, b]$)



ALLORA $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $\underbrace{|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)}$

$\Downarrow$

$$|f(x)| \geq f^+(x) \geq 0 \quad \forall x$$
$$|f(x)| \geq f^-(x) \geq 0 \quad \forall x$$

Allora, se $\int_a^b |f|$ CONVERGE, PER IL CONFRONTO, $\Rightarrow$

$\int_a^b f^+(x)\,dx$ CONVERGE e $\int_a^b f^-(x)\,dx$ CONVERGE

$\Longrightarrow$ per le proprietà (linearità) dell'integrale improprio

anche $f = f^+ - f^-$ è integrabile (in s. impr.) su $]a,b]$

LA CONV. DI $\int_a^b |f|$ è SUFFICIENTE per la CONV. DI $\int_a^b f$ MA NON È NECESSARIA

Potrebbe succedere (lo vedremo) che $\int_a^b f^+(x)\,dx = +\infty$, $\int_a^b f^-(x)\,dx = +\infty$, MA che $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGA.

$$\int_c^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_c^b f^+(x)\,dx}_{\downarrow\ +\infty} - \underbrace{\int_c^b f^-(x)\,dx}_{\downarrow\ -\infty} \to \ell$$

QUESTO CRITERIO SUGGERISCE LA SEGUENTE

<u>Definizione</u> Diremo che $\int_a^b f(x)\,dx$ CONVERGE

ASSOLUTAMENTE (f è ASSOLUTAMENTE SOMMABILE su $]a, b]$)

se $\int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty$ $\left(\int_a^b |f| \text{ è convergente} \right)$ #

Con questa definizione, il criterio di primo diventa:

$$\int_a^b f \text{ assolutamente convergente} \Rightarrow \int_a^b f \text{ CONVERGENTE}$$

In effetti la convergenza assoluta implica la convergenza, ma "è di più"

ESEMPIO $\qquad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$ su $\mathbb{R}$

devo considerare $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ e $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

FACCIO IL CASO $[0, +\infty[$ (l'altro è analogo)

(1) Passo a $|f(x)| = \dfrac{|\sin(x)|}{1+x^2}$

(2) Dato che $|\sin(x)| \leq 1$ posso scrivere $|f(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$

(3) Dato che $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ converge $\left(\text{fa } \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$ che $\int_0^{+\infty} |f(x)|\, dx$ CONVERGE

confronto tra funzioni positive

(4) Per il criterio di conv. ass. anche $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ CONVERGE

(stesso discorso per $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ $\alpha > 1$)

OLTRE ALLA CONVERGENZA ASSOLUTA

(pensare a $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$)

CRITERIO (ABEL) Supponiamo che $f : [a, +\infty[$

$$f(x) = a(x)\, b(x)$$ DOVE:

- a è derivabile, $a'(x) \leq 0$, $\lim_{x \to +\infty} a(x) = 0$
- b è tale che, posto $B(x) = \int_a^x b(t)dt$, B è limitato

$\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.

DIM. Sia $\bar{B}$ tale che $|B(x)| \leq \bar{B}$ $\forall x \geq a$.

Prendiamo $c \geq a$ e consideriamo

$\int_a^c f(x)\,dx =$ (devo dim. che il lim. per $c \to \infty$ esiste finito)

$\int_a^c a(x)\,b(x)\,dx =$ (integro per parti : $B' = b$)

$$\underbrace{\left[a(x)\,B(x) \right]_a^c}_{1} - \underbrace{\int_a^c a'(x)\,B(x)\,dx}_{2}$$

1 $= a(c)\,B(c) - 0 \quad (B(a) = 0) \implies$

$$\lim_{c \to +\infty} 1 = \lim_{c \to \infty} \underbrace{a(c)}_{\text{INFINITESIMA}} \overbrace{B(c)}^{\text{LIMITATA}} = 0$$

2 $\int_a^c a'(x)\,B(x)\,dx$; dico che $f_1(x) = a'(x)\,B(x)$

è assolutamente convergente. Infatti

$$0 \le |f_1(x)| = -a'(x)\,|B(x)| \le -a'(x)\,\overline{B} \qquad (a' \le 0)$$

e $\lim_{c \to \infty} \int_a^c -a'(x)\,\overline{B}\,dx = \overline{B} \lim_{c \to \infty} \int_a^c -a'(x)\,dx$

$$= \bar{B} \lim \left[-a(x) \right]_a^c = \bar{B} \lim_{c \to \infty} \left(a(a) - a(c) \right) =$$

$$\bar{B}\, a(a) \in \mathbb{R}$$

Dunque $|f_1|$ è integrabile $\Rightarrow$ $f_1(x)$ è integrabile

$\Leftrightarrow$ $\lim_{c \to \infty} \int_a^c f_1(x)\,dx$ esiste finito

cioè ② ha limite finito per $c \to +\infty$

POSSO ANCHE SCRIVERE

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\int_a^{+\infty} a'(x)\, B(x)\,dx$$

dove l'integrale a destra converge assolutamente.

ANCHE SE L'INT. A SX PUÒ NON ESSERE ASS. CONVERGENTE

<u>ESEMPIO</u> (standard) $\quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ su $[1, +\infty[$

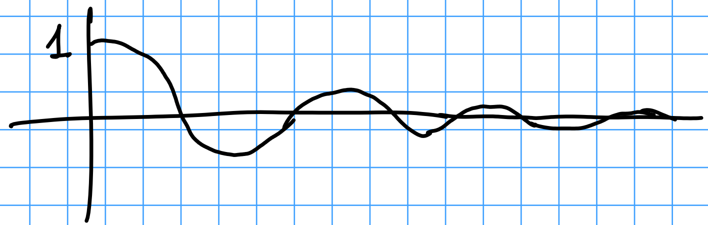
Prendo $\cdot$ $a(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad \left(\lim_{x \to \infty} a(x) = 0, \quad a'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0 \right)$

• $b(x) = \sin(x) \Rightarrow B(x) = \int_1^x \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_1^x$

$= \cos(1) - \cos(x)$ LIMITATA

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ converge !!

$\left(\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \right.$ converge dato che $\left. \frac{\sin(x)}{x} \to 1 \text{ per } x \to 0 \right)$



<u>NOTA</u>

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a x)}{x}\,dx =$$

$y = ax$

$x = \frac{y}{a} \quad dx = \frac{dy}{a}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{\frac{y}{a}} \frac{dy}{a} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}$$

(NON DIPENDE DA $a > 0$)

<u>PERÒ</u> $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ NON CONV. ASSOLUTAMENTE

(Area delle "gobbe positive" $= +\infty$ / Area delle "gobbe negative" $= -\infty$

ma "l'area complessiva" è finita

(lo vedremo, usando la serie)