Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

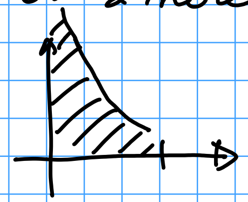
Ventottesima lezione, 24 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

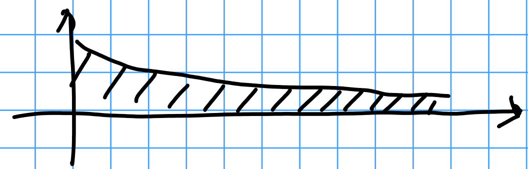
INTEGRALI IMPROPRI / GENERALIZZATI

Vogliamo misurare l'area di regioni <u>ILLIMITATE</u>

2 casi (che si possono combinare)



(A) FUNZIONE ILLIMITATA

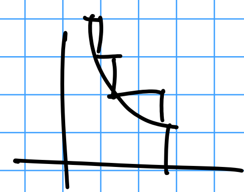


(B) INTERVALLO ILLIMITATO

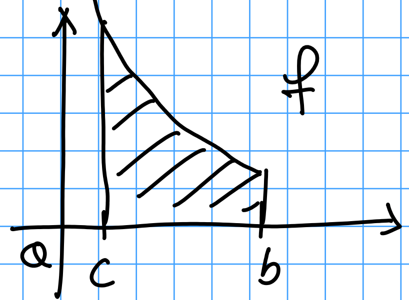
IN GENERALE POSSO AVERE ENTRAMBI I COMPORTAMENTI

NON POSSO TROVARE QUESTI INTEGRALI CON LE "SOMME DI CAUCHY-RIEMANN"

perché tali somme danno risultato INFINITO



<u>Def.</u> (caso A) Supponiamo che $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, sia integrabile (secondo Riemann) su ogni $[c, b]$ se $a < c \leq b$.



(per esempio f è continua su $]a,b]$)

- DICO CHE f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO (*) su $]a,b]$ se esiste finito

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx \quad \leftarrow \boxed{\times}$$

In tal caso chiamo INTEGRALE IMPROPRIO DI f su $]a,b]$ tale limite e lo indico con $\int_a^b f(x)\,dx$.

(*) oppure dico che l'integrale improprio di f su $]a,b]$ è "CONVERGENTE"

- Si dice che l'int. improprio è "DIVERGENTE" se il limite $\boxed{\times}$ esiste ma fa $+\infty$ o $-\infty$.

- Si dice che l'int. improprio è "INDERMINATO" se il limite $\boxed{\times}$ NON ESISTE

OSS. Nel terzo caso NON HA SENSO la scrittura $\int_a^b f(x)dx$

Negli altri due (anche nel secondo) ha senso scrivere $\int_a^b f(x)dx$

eventualmente $\pm\infty$

CONVENZIONE Se so (per qualche motivo) che $\boxtimes$ esiste

uso comunque l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$. Potrò allora scrivere

integrale convergente $\iff$ $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

ESEMPIO TIPICO (lo vediamo poi) è dato da $f \geq 0$:

per le funzioni positive l'integrale non può essere indeterminato

e quindi ha senso scrivere $\int_a^b f(x)\,dx$ (anche se

f potrebbe non essere integrabile)

ESEMPIO (IMPORTANTE) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ su $]0,1]$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \leftarrow ?!$$

(chiaramente se $\alpha \leq 0$ ho una funzione integrabile secondo Riemann

e quindi il caso interessante è $\alpha > 0$)

Per vedere se l'int. converge applico la def: fisso $c > 0$

$$\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$ (lo posso fare perché $\frac{1}{x^\alpha}$ è continua su $[c,1]$)

$$\int_c^1 \overset{''}{x^{-\alpha}}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow{c \to 0^+} \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$$

$(\alpha \neq 1)$

POSSO SCRIVERE
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Rimane il caso $\alpha = 1$ (le formule sopra non si può usare)

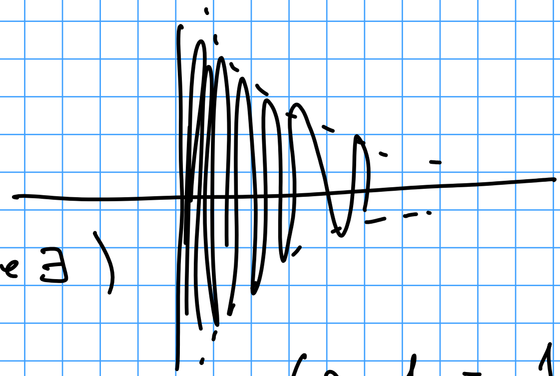
$$\int_c^1 \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_c^1 = \underset{\overset{''}{0}}{\ln(1)} - \ln(c) \to +\infty$$

ANCHE SE $\alpha = 1$ l'integrale diverge: $\int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty$

DA RICORDARE: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ CONVERGE $\Longleftrightarrow$ $\alpha < 1$ ($\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ CONV. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}$ DIV.)

<u>ESEMPIO</u> (di integrale indeterminato)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$



Applico la def.: devo fare (se $\exists$)

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \qquad \left(\text{se } t=\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2}dx = -dt\right.$$

$$\lim_{c\to 0^+}\int_{1/c}^1 -\sin(t)\,dt = \lim_{c\to 0^+}\int_1^{1/c}\sin(t)\,dt = \lim_{d\to+\infty}\int_1^d \sin(t)\,dt$$

$$\lim_{d\to+\infty}\left(-\cos(d)+\cos(1)\right) \leftarrow \text{NON ESISTE}$$

VEDREMO POI CHE $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ esiste

anche se $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$

IL PROBLEMA TIPICO (riguardo agli integrali impropri):

stabilire se un integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è convergente <u>SENZA</u> calcolarne esplicitamente il valore

↑

TROVEREMO DEI CRITERI DI CONVERGENZA

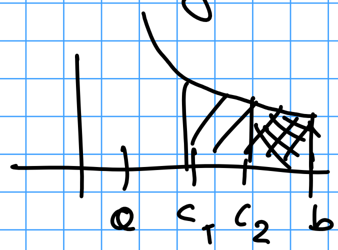
IN QUESTA OTTICA È IMPORTANTE IL CASO DELLE FUNZIONI POSITIVE

Proposizione Se $f:]a,b] \to \mathbb{R}$, integrabile su ogni $[c,b]$ per $a < c \le b$, e $f \ge 0$ allora l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste finito o infinito (NON PUÒ ESSERE INDETERMINATO)

Sono allora autorizzato a scrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ CONVERGE } \iff \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$$

Dim. Basta notare che la funzione $F(c) = \int_c^b f(x)\,dx$ È DECRESCENTE



Se $c_2 > c_1 \Rightarrow$ $F(c_2) - F(c_1) = \int_{c_2}^b f(x)\,dx - \int_{c_1}^b f(x)\,dx$

$$= - \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \le 0$$

Peraltro io so che le funzioni monotone hanno sempre limite dx/sx

Per trovare la convergenza dell'integrale di una funzione positiva basta trovare una limitazione superiore per l'integrale su $[c, b]$.

Criterio del confronto Siano $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$, integrabili su ogni $[c, b]$ per $a < c \leq b$, e tali tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in]a, b]$$

ALLORA

- Se g è integrabile (in senso improprio su $]a, b]$) $\Rightarrow$ f è integrabile (s.i. su $]a, b]$)
- Se f ha int. divergente $\Rightarrow$ g ha int. divergente

$$\left(\int_a^b g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < +\infty \Big/ \int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty \right)$$

Dim. Dato che f, g sono ≥ 0 gli integrali

$$\int_0^b f(x)\,dx \quad , \quad \int_0^b g(x)\,dx$$

esistono, positivi – eventualmente uguali a $+\infty$.

Dato che $f \leq g \Rightarrow$

$$\boxed{0 \leq \int_0^b f(x)\,dx \leq \int_0^b g(x)\,dx} \quad \leftarrow \text{SEGUE LA TESI.}$$

$$\left(\Rightarrow \int_c^b f(x)\,dx \leq \int_c^b g(x)\,dx \quad \forall c \in \left]0, b\right] \text{ e poi passo al } \lim_{c \to 0^+} \right)$$

Da questo criterio segue per es. che

$$\int_0^1 \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

è convergente dato che, posto

$$f(x) = \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}} \quad , \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \left(-1 \leq \sin(x) \leq 1 \right)$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx < +\infty \qquad \left(g(x) = \frac{2}{x^\alpha} \text{ con } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \right)$$

PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO f è integrabile.

<u>NOTA</u> Ne segue che $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ è integrabile (anche se non è ≥ 0). In effetti

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2} g(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}}_{f(x)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\frac{1}{2}g(x)}$$

IN MODO SIMILE POSSO DIM. CHE

$\dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}$ è integrabile per $\alpha < 1$

(OSSERVAZIONI CHE SARANNO PIÙ INTERESSANTI SU $[1, +\infty[$)

Andava detto all'inizio che:

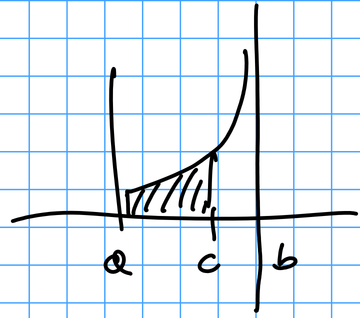
<u>Teorema</u> f, g int. in senso improprio su $]a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha f + \beta g$ int. in s.i. su $]a, b]$

(LINEARITÀ DELL' INT. IMPROPRIO)

IN MODO ANALOGO DEFINISCO L'INT. IMPROPRIO SU $[a,b[$

come $\displaystyle\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$



e tutto si ripete in modo analogo.

<u>CASO B</u> <u>Def.</u> Sia $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$, integrabile su $[a,b]$ per ogni $b>a$ (per es. f continua su $[a,+\infty[$).

- Dico che f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty[$ se esiste <u>FINITO</u> $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$.

Se questo avviene chiamo integrale improprio su $[a,+\infty[$ tale limite e lo indico con $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(dico anche che L'INTEGRALE È CONVERGENTE)

- Dico che l'int. è DIVERGENTE se il limite sopra esiste, ma fa $+\infty$ / $-\infty$. In tal caso scrivo

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \quad / -\infty$$

· Dico che l'int. è INDETERMINATO (e non scrivo nulla!) se tale limite NON ESISTE

<u>STESSO DISCORSO</u> per funzioni su $]-\infty, 0]$ $\left(\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx \dots \right)$

<u>ESEMPIO</u> (IMPORTANTE)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

(tale int. esiste dato che $\frac{1}{x^\alpha} \geq 0$ - oppure <u>perché lo so calcolare</u>)

I calcoli sono quelli di prima:

$(\alpha \neq 1)$
$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$(\alpha = 1)$
$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x \right]_1^b = \ln(b) \longrightarrow +\infty$$

ANCHE IN QUESTO VALE IL TEOREMA DEL CONFRONTO
(rimpiazzando $]a, b]$ con $[a, +\infty[$ / $]-\infty, a]$)

<u>Esempio</u> (simile a quello di prima, ma PIÙ INTERESSANTE visto che effettivamente $\sin(x)$ cambia segno all'infinito)

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$, mi chiedo se è integrabile su $[1, +\infty[$

<u>NOTA</u> $\sin(x)$ non è né ≥ 0 né ≤ 0 "all'infinito"

NON POSSO USARE UN CONFRONTO

USIAMO UN "TRUCCO" considero $h(x) = \frac{1+\sin(x)}{x^2}$, $g(x) = \frac{2}{x^2}$

POSSO SCRIVERE

$$0 \leq h(x) \leq g(x)$$

DATO CHE $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \implies \int_1^{+\infty} h(x)\,dx < +\infty$

(<u>CONFRONTO</u> TRA INTEGRALI DI FUNZIONI ≥ 0)

Per cui $h(x) = f(x) + \frac{1}{x^2} = f(x) + \frac{1}{2} g(x) \Longleftrightarrow$

$f(x) = h(x) - \frac{1}{2} g(x) \Rightarrow f$ è integrabile

<u>NOTA</u> Nello stesso modo posso dim. che $\frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ è int $\alpha > 1$

Vedremo che $\frac{\sin(x)}{x}$ è int. su $[1, +\infty[$ (anche se $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty$)

TORNIAMO ALL'ESEMPIO DI PRIMA (è più semplice ...)

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ su $]0, 1]$

POSSIAMO NOTARE CHE $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0$

Se allora chiamo $f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f_1$ è continua

$\Rightarrow f_1$ è integrabile NEL SENSO DI RIEMANN SU $[0, 1]$

$$\Rightarrow \int_c^1 f_1(x)\,dx \to \int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$$\parallel$$

$$\int_c^1 f(x)\,dx$$

IN GENERALE

SE f E' INTEGR SECONDO R. / o se coincide con una f_1 int secondo R, tranne che nel "punto limite" $\Rightarrow$ L'INTEGRALE IMPROPRIO = INTEGRALE DI Riemann di f / f_1

PIU' INTERESSANTE

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$$

DOMANDA: per quali $\alpha > 0$ f è integrabile su $]0,1]$

(NOTA CHE $f \geq 0$)

Se uso la diseguaglianza $0 \leq \sin(x) \leq 1$ (in $]0,1]$)

OTTENGO $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$ $\Rightarrow$ f è int. per $\alpha < 1$

PERÒ POSSO FARE MEGLIO SE USO IL FATTO CHE

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

DA QUESTO OTTENGO che $\frac{\sin(x)}{x} \le M$ $\forall x \in]0,1]$ per un opportuno M

(se estendo $\frac{\sin(x)}{x}$ mettendolo 1 in $x=0$ ho UNA FUNZ. CONTINUA che per Weierstrass HA max M tra 0 e 1)

DUNQUE

$$\frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \le \frac{M}{x^{\alpha-1}}$$

INTEGRABILE per $\boxed{\alpha < 2}$

(NOTA BASTAVA LA DIS. $\sin(x) \le x$ per $x \geq 0$ )

Che succede se $\alpha \geq 2$ vedremo poi che non è int.

IN QUESTO ESEMPIO L'IDEA È CHE, vicino a zero, $\sin(x) \simeq x$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \simeq \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

TEOREMA (confronto asintotico)

Siano f e $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ $\left([a, +\infty[\to \mathbb{R} \right)$ tali che siano integrabili in ogni $[c, b]$ con $a < c \le b$ $\left(\text{ogni } [a, b] \text{ con } b > a\right)$, $f, g \geq 0$ e che

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right)$$

f e g sono asintotiche in a (all'infinito)

ALLORA

$$\int_a^b f(x)\,dx < +\infty \iff \int_a^b g(x)\,dx < +\infty$$

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \iff \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \right)$$

NATURALMENTE NON È DETTO CHE GLI INTEGRALI COINCIDANO

OSSERVAZIONE PRELIMINARE Se $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, è integrabile su ogni $[c, b]$ con $c > a$, allora dato $a < b_1 < b$

f int. in senso improprio su $]a, b]$

$\Updownarrow$

f int. in senso improprio su $]a, b_1]$

Per l'integrabilità in senso improprio contano i valori di $f(x)$ per x vicino ad a.

DIM.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{b_1}^{b} f(x)\,dx}_{\text{ESISTE SECONDO RIEMANN}}$$

CONSEGUENZA Nel criterio del confronto basta che $\exists\, b_1 > a$

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \text{per} \quad a < x < b_1$$

basta che la dis. valga VICINO AD a

DIM. (del confronto asintotico). Dato che $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\Rightarrow \exists\ b_1 > a$ tale che

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2 \qquad \forall x \in]a, b_1]}$$

($\frac{1}{2} < 1 < 2$, applico la "permanenza del segno")

$$\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq 2g(x) \qquad \forall x \in]a, b_1]$$

La tesi segue applicando il confronto tra f e $\frac{g}{2}$ / f e $2g$

- NOTO che g int. $\Leftrightarrow$ $2g$ int. $\Leftrightarrow$ $\frac{g}{2}$ int.

CIOE': f INT. $\Rightarrow$ $\frac{g}{2}$ INT $\Rightarrow$ g INT.

oppure g INT $\Rightarrow$ $2g$ INT. $\Rightarrow$ f INT.

(lo stesso discorso nel caso $[a, +\infty[$ - - - -)

OSS. se ho $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ con $0 < \ell < +\infty$

vale lo stesso risultato (IN QUESTO CASO $f \simeq lg$)

SE INVECE $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si vede facilmente che

$$\int_a^b g(x)\, dx < +\infty \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \quad \int_a^b f(x)\, dx < +\infty$$

("f è meglio di g")

VICEVERSA se $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx < +\infty \implies \int_a^b g(x)\, dx$$ (basta scambiare f e g)

TORNIAMO ALL' ESEMPIO $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$ su $]0,1]$

Per le proprietà di $\sin(x)$ si ha $f(x) \simeq \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ (NOTA $f \geq 0$)

Dato che $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx < +\infty \iff \alpha < 2$ deduco che

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 2$$

(quindi se $\alpha \geq 2$ l'integrale DIVERGE A $+\infty$)

<u>DUNQUE</u>, se si rimane nelle funzioni positive, il problema diventa "classificare" l'ordine di infinito (se $x \to a$) o di infinitesimo (se $x \to \infty$) della funzione da studiare, trovando una funzione asintotica di cui si conosce l'integrabilità

<u>ESEMPIO</u>:

<u>$a > 0$</u>

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-ax}\,dx =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{-ax}}{-a} \right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{e^{-ab}}{a} \right) = \frac{1}{a}$$

- $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ $\left(\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \text{ con } a>0 \right)$ è finito dato che

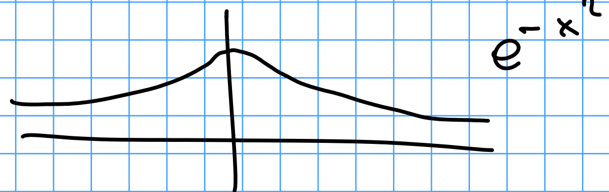
$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{per } x \geq 1 \qquad (x^2 \geq x \text{ se } x \geq 1)$$

$\Rightarrow$ per confronto $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty \Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty$$

<u>NOTA</u> la primitiva di e^{-x^2} NON È CALCOLABILE ELEMENTARMENTE

– però $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ si sa calcolare $\left(= \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \ ???\right)$



$$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx < +\infty \quad (\text{si potrebbe calcolare per parti})$$

Per vedere solo l'integrabilità (senza trovare il valore dell'int.) posso ragionare così:

$f(x) = x^k e^{-x}$, calcolo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{k+2} e^{-x} = 0$

(e^{-x} VINCE !) Dunque applico il criterio asintotico con $\ell = 0$ che mi dice che se $\frac{1}{x^2}$ è INT $\Rightarrow f(x)$ è INT.

IO SO CHE $\frac{1}{x^2}$ è int. su $[1, +\infty[$ $\Rightarrow$ f è int. su $[1, +\infty[$

Però f è continua su $[0, 1]$ $\Rightarrow$ f è int. su $[0, +\infty[$

HO CONFRONTATO $x^k e^{-x}$ con $\frac{1}{x^2}$

POTEVO ANCHE CONFRONTARE $\underbrace{x^k e^{-x}}_{f(x)}$ con $\underbrace{e^{-x/2}}_{g(x)}$ perché

se faccio $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^k e^{-x}}{e^{-x/2}} = x^k e^{-x/2} \longrightarrow 0$

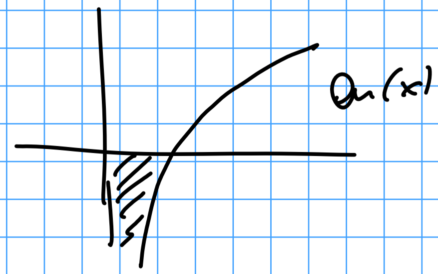
Dato che g è integrabile anche f lo è.

AVREI ANCHE POTUTO USARE $g(x) = \underline{e^{-a x} \text{ CON } a < 1}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^k e^{-x}}{e^{-a x}} = x^k e^{-(1-a)x} \longrightarrow 0 \quad \text{se } (1-a) > 0$$

IDEA: $x^k e^{-x}$ è "peggio" di e^{-x}, MA
è "meglio" di e^{-ax} per ogni $a<1$

$\int_0^1 \ln(x)\,dx$ DEVE ESSERE FINITO



Per vederlo facciamo i conti

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot \ln(x)\,dx = \text{(per parti)}$$

$$x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln(x) - x + c$$

$$\Rightarrow \int_a^1 \ln(x)\,dx = \Big[x\ln(x) - x\Big]_a^1 = \underbrace{-a\ln(a)}_{\text{tende a zero}} - 1 + a \xrightarrow{a\to 0} -1$$

VENERDÌ PROSSIMO 1 ora di recupero