Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventisettesima lezione, 23 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

INTEGRALI RICONDUCIBILI A FUNZIONI RAZIONALI

1) $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ dove

$$F(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad P, Q \text{ polinomi}$$

$ad + bc \neq 0$

<u>REGOLA</u> $t = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ $\rightsquigarrow$ ci si riconduce a una funz. razionale di t

<u>Per esempio</u> $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$

$F(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$; uso la sostituzione $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-1} \iff x t^2 - t^2 = x + 1 \iff x(t^2-1) = 1 + t^2 \iff$$

$$x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \text{ . Allora } dx = \frac{2t(t^2-1) - (t^2+1)2t}{(t^2-1)^2}\, dt = -\frac{4t\, dt}{(t^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \int \underset{\frac{1}{x^2}}{\underbrace{\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2}} \cdot \underset{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\underbrace{t}} \cdot \underset{dx}{\underbrace{\frac{(-4t)\,dt}{(t^2-1)^2}}} = -\int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

Usiamo il metodo di Hermite:

$$\frac{-4t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{d}{dt}\,\frac{Ct+D}{(t^2+1)}$$

$$= \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C(t^2+1)-(Ct+D)\,2t}{(t^2+1)^2} = \frac{(At+B)(t^2+1)+C(t^2+1)-2Ct^2-2Dt}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{At^3+t^2(B-C)+t(A-2D)+(B+C)}{(t^2+1)^2} \iff$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B-C=-4 \\ D=0 \\ B+C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0, \quad D=0 \\ B=-2 \\ C=2 \end{cases}$$

Viene

$$-\frac{2}{t^2+1} + \frac{d}{dt}\,\frac{2t}{t^2+1}$$

(Verifica: $\displaystyle \frac{-2}{t^2+1} + \frac{2(t^2+1)-4t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{-2t^2-2+2t^2+2-4t^2}{(t^2+1)^2}$ ok)

$\Rightarrow$ INTEGRALE $= \quad -2\,\operatorname{artg}(t) + \dfrac{2t}{t^2+1} + c$ devo mettere $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$$: \quad -2\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Big/ \left(\frac{x+1}{x-1} + 1\right) + c =$$

$$-2\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Big/ \frac{2x}{x-1} + c =$$

$$-2\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c$$

IN MODO ANALOGO $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$ . . . stesso sost. . .

$$\int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,dt = \;-\;- \qquad ?\,?$$

---

(2) $\displaystyle\int F\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right) dx \qquad F(x,y)$ razionale

Sostituzione $\sqrt{x^2+ax+b} = x+t$

(Noto che $\cancel{x^2}+ax+b = \cancel{x^2}+2xt+t^2$ ... posso ricavare x)

Esempio $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\,dx$

$$t+x = \sqrt{x^2+x+1} \iff t^2+2xt+\cancel{x^2} = \cancel{x^2}+x+1 \iff$$

$$2xt-x = 1-t^2 \iff x = \frac{1-t^2}{2t-1} \leftarrow$$

$$x+t = \frac{1-t^2}{2t-1}+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1}$$

$$dx = \frac{-2t(2t-1)-(1-t^2)\cdot 2}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \text{INT. diventa} \int \underbrace{\frac{\cancel{2t-1}}{1-t^2}}_{\frac{1}{x}} \; \underbrace{\frac{t^2-t+1}{\cancel{2t-1}}}_{x+t} \; \underbrace{\frac{(-2)(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt}_{dx} =$$

$$2\int \underbrace{\frac{(t^2-t+1)^2}{(t^2-1)(2t-1)^2}} dt \leftarrow \text{(E' UNA FUNZIONE RAZIONALE ...)}$$

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = A + \frac{P_1(t)}{Q(t)}$$ è chiaro che $A = \lim_{t\to\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{1}{4}$

dunque devo fare $\frac{(t^2-t+1)^2}{(t^2-1)(2t-1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{P_1(t)}{Q(t)}$

$$\parallel \qquad \leftarrow (4t^2-4t+1)$$

$$\frac{4(t^2-t+1)^2-(t^2-1)(2t-1)^2}{4(t^2-1)(2t-1)^2} =$$

$$\frac{4(\cancel{t^4}+t^2+1-2t^3+2t^2-2t)-(\cancel{4t^4}-4t^3+t^2-4t^2+4t-1)}{4(t^2-1)(2t-1)^2}$$

$$\frac{-4t^3+15t^2-12t+5}{4(t^2-1)(2t-1)^2} = \left(\frac{A}{2t-2}+\frac{B}{2t+2}+\frac{C}{2t-1}+\frac{d}{dt}\frac{D}{2t-1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4(t-1)(t+1)(2t-1)^2 \\ (2t-2)(2t+2)(2t-1)^2 \end{array}\right\} = \frac{A}{2t-2}+\frac{B}{2t+2}+\frac{C}{2t-1}-\frac{2D}{(2t-1)^2} =$$

$$\frac{A(2t+2)(4t^2-2t+1)+B(2t-2)(4t^2-2t+1)+C(4t^2+4)(2t-1)-2D}{4(t^2-1)(2t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{\text{Den.}}\left\{t^3(8A+8B\overset{+8C}{})+t^2(8A-4A-8B-4B-4C)+t(2A-4A+2B+4B+8C)+(2A-2B-C-2D)\right\}$$

$$\begin{cases} 8A+8B+8C=-4 \\ 4A-12B-4C=15 \\ -2A+6B+8C=-12 \\ 2A-2B-4C-2D=5 \end{cases}$$

non c'è D, lo risolvo per primo

Elimino A

$-24+15$

$$\begin{cases} -2A+6B+8C=-12 & \leftarrow \text{III} \\ 12C=-\cancel{9} & \leftarrow 2\cdot\text{III}+\text{II} \\ 32B+40C=-52 & \leftarrow 4\cdot\text{III}+\text{I} \end{cases}$$

$\boxed{C=-\frac{3}{4}}$

$$\begin{cases} 32B-30=-52 \\ -2A+6B=-6 \end{cases}$$

$\boxed{B=-\frac{22}{32}=-\frac{11}{16}}$

$$-2A - \frac{11\cdot 3}{8} = -6 \qquad -2A = \frac{+33-48}{8}$$

$$\boxed{A = \frac{15}{16}}$$

$$2D = -5 + 2A - 2B - 4C = -5 + \frac{15}{8} + \frac{11}{8} + 3 = \frac{-16+15+11}{8}$$

$$= \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad \boxed{D = \frac{5}{8}}$$

DUNQUE L'INTEGRALE VIENE

$$\int \left(\frac{A}{2t-2} + \frac{B}{2t+2} + \frac{C}{2t-1} + \frac{d}{dt}\frac{D}{2t-1} \right) dt =$$

$$\frac{A}{2}\ln|\underbrace{2t-2}_{(t-1)2}| + \frac{B}{2}\ln|\underbrace{2t+2}_{(t+1)2}| + \frac{C}{2}\ln|2t-1| + \frac{D}{2t-1} + c =$$

$$\frac{A}{2}\ln|t-1| + \frac{B}{2}\ln|t+1| + \frac{C}{2}\ln|2t-1| + \frac{D}{2t-1} + \text{cost}$$

---

(3) Sempre riguardo a $\int F(x, \sqrt{x^2+ax+b})\,dx$

oppure $$\int F\left(x, \sqrt{-x^2+ax+b}\right) dx$$

Nel caso in cui il polinomio sotto radice abbia due radici reali $x_1 < x_2$ (e dunque la funzione integranda è definita:
- per $x \notin]x_1, x_2[$ nel primo caso
- per $x \in [x_1, x_2]$ nel secondo caso)

Se ci sono le due radici posso scrivere

$$F\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right) = F\left(x, \sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}\right) = F_1\left(x, \sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}\,(x-x_2)\right)$$

CHE SI PUÒ AFFRONTARE COL METODO (1)

ANALOGAMENTE

$$F\left(x, \sqrt{-x^2+ax+b}\right) dx = F\left(x, \sqrt{(x_1-x)(x-x_2)}\right) = F\left(x, \sqrt{\frac{x_1-x}{x-x_2}}\,(x-x_2)\right)$$

(posso usare $t = \sqrt{\quad}$)

(4) $\int F(e^{ax})\,dx$ con F funzione razionale

Basta porre $t = e^{ax}$ $ax = \ln(t)$ $dx = \frac{1}{a}\frac{1}{t}\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{F(t)}{a\,t}\,dt$$

---

(5) $\int F(\sin(ax), \cos(ax))\,dx$

si possono sempre affrontare con la sostituzione

$t = \tan\left(\frac{ax}{2}\right)$ (ricordo che con questa sostituzione $\sin(ax) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(ax) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$)

(5') Se ho $\int F(\tan(ax))\,dx$ (rientro nel caso sopra)

è meglio usare $t = \tan(ax)$

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} \qquad \text{uso:} \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2\arctan(t) = x \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

TROVO $$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+\cancel{t^2}}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+\cancel{t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t+1-t^2} =$$

$$\int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + c = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+c$$

$$\int \frac{\sin(x)+3\cos(x)}{2\sin(x)-\cos(x)}\,dx \qquad \text{conviene esprimere tutto mediante } \tan(x)$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{\tan(x)+3}{2\tan(x)-1}\,dx \qquad \text{uso} \qquad t = \tan(x) \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{(t+3)}{(2t-1)} \frac{dt}{(1+t^2)} = \frac{A}{2t-1} + \frac{Bt+D}{t^2+1} =$$

$$\frac{A(t^2+1)+(2t-1)(Bt+D)}{(2t-1)(t^2+1)} = \frac{t^2(A+2B)+t(-B+2D)+A-D}{(}$$

$$\begin{cases} A+2B = 0 \\ -B+2D = 1 \\ A-D = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2B \\ -B+2D = 1 \\ -2B-D = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2B \\ -5B = 7 \\ 5D = -1 \end{cases}$$

$$A = \frac{14}{5} \qquad B = -\frac{7}{5} \qquad D = -\frac{1}{5} \qquad \Rightarrow$$

$$\int \text{—}\, dt = \frac{14}{5}\frac{1}{2}\ln(2t-1) - \frac{7}{5}\ln\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{5}\arctan(t) + c$$

$$= \frac{7}{5}\ln\left(\left|\frac{2t-1}{\sqrt{t^2+1}}\right|\right) - \frac{1}{5}\arctan(t) + c =$$

$$\frac{7}{5}\ln\left|\frac{2\tan(x)-1}{\sqrt{\tan^2(x)+1}}\right| - \frac{1}{5}x + c =$$

$$\frac{7}{5}\ln\left|(2\tan(x)-1)\cos(x)\right| - \frac{x}{5} + c =$$

$$\frac{7}{5}\ln\left(2\sin(x) - \cos(x)\right) - \frac{x}{5} + c$$