Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventiseiesima lezione, 16 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

DOMANI (SABATO 17/3) NON C'E' LEZIONE

(recupereremo delle ore facendo 3 ORE nei prossimi venerdì)

Integrazione delle funzioni razionali: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove P e Q sono POLINOMI con $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$ (funz. raz. proprie).

Sappiamo trattare il caso in cui Q ha solo radici semplici, cioè

$\boxed{Q(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_m)}$ dove $z_1 \neq z_2 \neq \cdots \neq z_m$

$(m = \text{grado}(Q))$. Ammettiamo $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$.

Conviene raggruppare le radici a seconda che siano reali / non reali

$$\{z_1, \ldots, z_m\} = \underbrace{\{x_1, \ldots, x_k\}}_{\text{Reali}} \cup \underbrace{\{a_1 \pm i b_1, \ldots, a_h \pm i b_h\}}_{\text{coppie coniugate}}$$

$(k + 2h = m)$. POSSO ALLORA SCRIVERE

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{B_1 x + C_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \dots + \frac{B_h x + C_h}{(x-a_h)^2 + b_h^2}$$

$$(x - a_1 - i b_1)(x - a_1 + i b_1) = (x-a_1)^2 + b_1^2$$

(RIDUZIONE IN FRATTI SEMPLICI)

DOPO DI CHE POSSO INTEGRARE TUTTI QUESTI ADDENDI (con i metodi visti).

ALTRO MODO DI TROVARE I COEFF. DELLA RIDUZIONE (alternativo al sistema lineare visto l'altra volta)
VALIDO SOLO PER RADICI SEMPLICI.

SUPPONIAMO CHE x_0 sia una radice semplice di $Q(x)$ $\Longleftrightarrow$

$\otimes$ $\underline{Q(x) = (x-x_0)\, Q_1(x)}$ dove $Q_1(x_0) \neq 0$.

OSS. Il fatto che x_0 sia semplice si può anche esprimere dicendo:

$\boxed{xx}$ $Q(x_0) = 0$, $Q'(x_0) \neq 0$ infatti da $\otimes$ si ha

$$Q(x_0) = (x - x_0)\, Q_1(x_0) = 0 \quad ; \text{ inoltre}$$

$$Q'(x) = Q_1(x) + (x-x_0)\, Q_1'(x) \Rightarrow \boxed{Q'(x_0) = Q_1(x_0)} \quad \#$$

Sotto tale ipotesi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_0)\,Q_1(x)}$

Supponiamo di avere fatto la riduzione $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{A_0}{x-x_0} + \underbrace{\text{altra roba che in } x_0 \text{ ha valore finito}}_{f_1(x)}$

Moltiplico per $(x-x_0)$ $\Rightarrow$

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = A_0 + f_1(x)(x-x_0)$$ + la posso calcolare in x_0

$$\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} = A_0 + 0$$

QUINDI SE x_0 è radice semplice di Q si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + f_1(x)$$ dove $f_1(x)$ è finito in x_0

e $$A_0 = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} = \boxed{\frac{P(x_0)}{Q'(x_0)}}$$

$Q_1(x_0)$: $Q(x)$ privato del fattore $(x-x_0)$

QUESTA FORMULA VALE SIA CHE $x_0 \in \mathbb{R}$ SIA CHE $x_0 \in \mathbb{C}$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^3+x} \qquad P(x) = x^2+4$$
$$Q(x) = x^3+x$$

VERO CHE $Q(x) = x^3+x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$

TRE RADICI SEMPLICI $0, i, -i$.

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$$ MA $C = \overline{B}$

Usando il metodo sopra basta calcolare $\frac{P(x)}{Q'(x)}$ nei punti $0, i, -i$

cioè $g(x) := \frac{x^2+4}{3x^2+1}$

$A = g(0) = 4 \qquad B = g(i) = \frac{3}{-3+1} = -\frac{3}{2} \qquad \left(C = g(-i) = \overline{B} \ldots \right)$

DUNQUE $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right) = \frac{4}{x} - \frac{3}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

VOLENDO FARE L'INTEGRALE, ABBIAMO

$$\int \frac{x^2+4}{x^3+x}\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = 4\ln|x| - \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$= \ln\left(\frac{x^4}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)$$

PASSIAMO AL CASO GENERALE. Si può scrivere

$$Q(x) = (x-x_1)^{m_1} \qquad (x-x_k)^{m_k}\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)^{n_1} \cdots \left((x-a_h)^2+b_h^2\right)^{n_h}$$

$m_1 \dots m_k$ le molteplicità di $x_1 \dots x_k$

$n_1 \dots n_h$ le molteplicità di $a_1 \pm i b_1 \dots a_h \pm i b_h$

($n = \text{grado}(Q) = m_1 + \dots + m_k + 2(n_1 + \dots + n_h)$)

POSSO TROVARE n coefficienti REALI tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{\frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}}_{\text{li so integrare}} +$$

stesse storie per le $x_2 \dots x_k$ $+$

$$\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)^2} + \dots + \frac{B_{1,m_1}x + C_{1,m_1}}{\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)^{m_1}}$$

???

$+$ stessa storia per $a_2 \pm i b_2, \dots, a_h \pm i b_h$

so integrare

PROBLEMA: COME INTEGRO UN TERMINE TIPO $\frac{1}{(x^2+1)^n}$, $\frac{x}{(x^2+1)^n}$??

lo so fare dato che $2x$ è la derivata di x^2+1

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \frac{1}{1-n}$$

VEDIAMO PER ES. $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$

"Trucco" che permette di scendere di grado mediante l'integrazione per parti:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3} - \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx =$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^3} \cdot x \, dx = \left[\begin{array}{l} \text{INTEGRO PER PARTI IL SECONDO} \\ \text{ADDENDO } f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^3} \quad G(x) = x \end{array} \right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\left[\; \overset{\Downarrow}{F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}} \qquad g(x) = 1 \; \right]$$

$$: \quad \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

STESSO GIOCO PER $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, x\, dx =$$

$$\operatorname{atan}(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\left(\frac{d}{dx} = -\frac{1}{x^2+1} = f \right)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + c$$

(LO DEVO METTERE NELL'ESPRESSIONE PRECEDENTE)

$$\int \frac{x}{(x+1)^3(x^2+1)}\,dx$$

UNA RADICE TRIPLA $x = -1$ (REALE)

DUE RADICI CONIUGATE $\pm i$ SEMPLICI

$$\frac{x}{(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} =$$

$$\frac{A(x+1)^2(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)^3}{(x+1)^3(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{Q(x)}\left\{A(x^2+2x+1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)(x^3+3x^2+3x+1)\right\}=$$

$$\frac{1}{Q(x)}\left\{x^4(A+D)+x^3(2A+B+3D+E)+x^2(2A+B+C+3D+3E)+x(2A+B+D+3E)+(A+B+C+E)\right\}$$

$$\begin{cases} A+D=0 \\ 2A+B+3D+E=0 \\ 2A+B+C+3D+3E=0 \\ 2A+B+D+3E=1 \\ A+B+C+E=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} D=-A \\ -A+B+E=0 \\ -A+B+C+3E=0 \\ A+B+3E=1 \\ A+B+C+E=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=-A \qquad E=A-B \\ -2A+2B-C=0 \qquad (3\cdot \mathrm{II}^\circ-\mathrm{III}^\circ) \\ -2A+C=-1 \qquad (\mathrm{III}^\circ-\mathrm{IV}^\circ) \end{cases}$$

$$\left\{ -2A \quad -C \quad = 0 \quad (\text{II} - \text{V}^\circ) \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D = -A, \quad E = A - B, \quad C = -2A \\ B = 0 \\ -4A = -1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} A = 1/4, \quad B = 0 \\ C = -1/2, \quad D = -\frac{1}{4}, \quad E = 1/4 \end{array} \right.$$

DUNQUE

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2+1} \quad \text{da cui}$$

$$\int f(x) = \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx - \int\frac{1}{x^2+1}dx\right) =$$

$$\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{8}\ln|x^2+1| + \frac{1}{4}\arctan(x) + \text{cost.} =$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\arctan(x) + \text{cost}$$

NOTA CHE LA PRIMITIVA HA LIMITE FINITO PER $x \to \infty$ — TORNA CON IL FATTO CHE $\int \frac{x}{(x+1)^3(x^2+1)}dx$ è INTEGRABILE A $+\infty$, dato

che è $\simeq \frac{1}{x^4}$ (DA VEDERE)

SE GUARDO I CALCOLI FATTI MI ACCORGO CHE LA DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI SI PUÒ RISCRIVERE IN UN ALTRO MODO

CON LA NOTAZIONE DI PRIMA (riguardo alle radici)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_k}{x-x_k} + \frac{B_1x+C_1}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \cdots + \frac{B_hx+C_h}{(x-a_h)^2+b_h^2} +$$

questo è tutto se le radici sono semplici

$$+ \frac{d}{dx} \frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{m_1-1} \cdots (x-x_k)^{m_k-1}\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)^{n_1-1} \cdots \left((x-a_h)^2+b_h^2\right)^{n_h-1}}$$

compaiono solo le radici con molteplicità ≥ 2

dove $P_1(x)$ è un polinomio (da trovare) di grado = "grado del denom. meno 1"

VEDIAMO L'ESEMPIO DI PRIMA CON QUESTO ULTIMO METODO

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Dx+E}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{D(x+1)^2-(Dx+E)\,2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{D(x+1)-2(Dx+E)}{(x+1)^3}=$$

$$\frac{A(x^2+2x+1)(x^2+1)+(Bx+C)(x^3+3x^2+3x+1)+D(x^2+1)(x+1)-2(Dx+E)(x^2+1)}{(x+1)^3(x^2+1)}$$

$$=\frac{1}{Q(x)}\Big\{x^4(A+B)+x^3(2A+3B+C+\overbrace{D-2D}^{-D})+$$

$$+x^2(2A+3B+3C+D-2E)+$$

$$x(2A+B+3C+\overbrace{D-2D}^{-D})+(A+C+D-2E)\Big\}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+3B+C-D=0 \\ 2A+3B+3C+D-2E=0 \\ 2A+B+3C-D=1 \\ A+C-2E=0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} B=-A \\ -A+C-D=0 \\ -A+3C+D-2E=0 \\ A+3C-D=1 \\ A+C-2E=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A \qquad D = -A + C \\ -2A + 4C - 2E = 0 \\ 2A + 2C = 1 \\ A + C - 2E = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -A\ ,\ D = -A + C\ ,\ A = \frac{1}{2} - C \\ 6C - 2E = 1 \\ 4E = 1 \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{4}\ ,\quad C = \frac{1}{4}\ ,\quad A = \frac{1}{4}\ ,\quad D = 0\ ,\quad B = -\frac{1}{4} \implies$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\,\frac{d}{dx}\,\frac{1}{(x+1)^2} \implies$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\arctan(x) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+1)^2} + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{4}\arctan(x) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+1)^2} + c$$

È LA STESSA DI PRIMA !!!