Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Venticinquesima lezione, 10 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

CONVENZIONE Se $b < a$ definiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

OSS. La formula

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

VALE SEMPRE, in qualunque ordine siano i punti a, b, c

(DIM. per esercizio!)

Nozione di primitive: F è primitiva di f se $F' = f$.

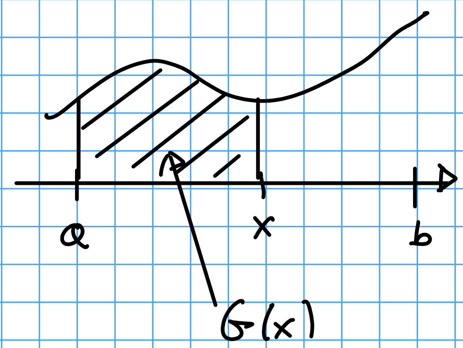
Cosa ci vuole (su f) perché f ammetta una primitiva?

<u>f CONTINUA</u>. Lo vediamo costruendo una primitiva di f

<u>Def.</u> Data f integrabile su $[a,b]$, costruisco una funzione G, detta <u>FUNZIONE INTEGRALE</u> (rel. a f), definita da:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

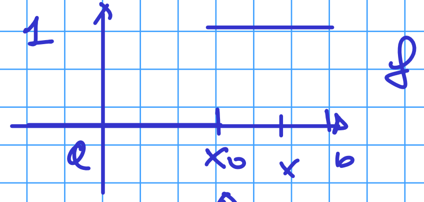
DEVO USARE UNA VARIABILE $\neq x$



<u>Teorema</u> (T. fond. calcolo integrale II).

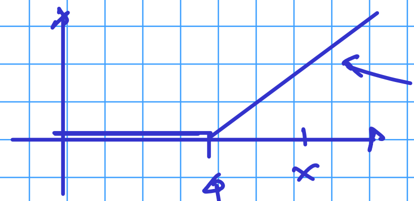
(a) Comunque preso f integrabile $\Rightarrow$ G è lipschitziana (dove la costante L è data da $\sup_{[a,b]} |f|$)

Anche se f è discontinua "la sua area" varia con continuità



DISCONTINUITÀ DI f

$\Longrightarrow$



G

pendenza $= 1$

G ha "pendenza max" pari a $1 = \max|f|$

"SPIGOLO" per G

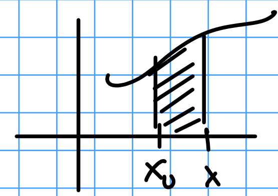
(5) Se f è continua $\Rightarrow$ G è derivabile e $G' = f$ (DUNQUE G è una primitiva di f).

IN PARTICOLARE SE f è continua, f ha una primitiva

DIM. Prendiamo x_0 e x in $[a,b]$, allora

$$G(x) - G(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \text{(additività rispetto alla base)}$$

$$= \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$



(a) IN GENERALE

$$|G(x) - G(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \quad \text{se } x_0 < x$$

$$\leq \int_{x_0}^x \sup_{[a,b]}|f| = \underbrace{\sup_{[a,b]}|f|}_{L}\,(x - x_0) = L\,|x - x_0|$$

Se prendo $x_0 > x$ si ottiene lo stesso risultato partendo da

$|G(x_0) - G(x)|$

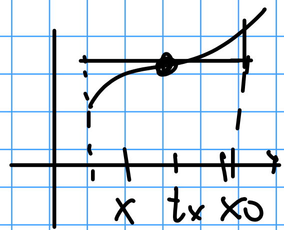
(b) Aggiungiamo l'ipotesi: f continua. Calcoliamo il rapp. incr. di G.

$$\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$ = media integrale di f tra x_0 e x

(sia che $x_0 < x$, sia che $x_0 > x$)

= (per il t. della media int.) $f(t_x)$ per un opportuno t_x

compreso tra x_0 e x (f è continua!)



Se faccio tendere $x \to x_0$ è chiaro che $t_x \to x_0$

(due carabinieri). Ne segue

cambio di variabile, uso

$$\lim_{x\to x_0} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(t_x) = \lim_{t\to x_0} f(t) \underset{\text{continuità di } f}{=} f(x_0)$$

HO DIM. CHE $\exists\, G'(x_0) = f(x_0)$

OSS. Se mi ricordo del fatto che le primitive differiscono per una costante, posso riottenere il Teor. Fond. I.

Se infatti se F è un'altra (QUALUNQUE!) primitiva $\Longrightarrow$ esiste una costante K tale che $F(x) = G(x) + K$. Se faccio la differenza tra b e a trovo (la costante sparisce)

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Torniamo al calcolo degli integrali: esaminiamo le tecniche di integrazione delle FUNZIONI RAZIONALI: $\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$ dove P e Q sono polinomi.

CASO PIU' ELEMENTARE $\quad f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{Z}$

sappiamo che

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cost.} & \text{se } n \neq -1 \\ \ln|x| + \text{cost.} & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

NOTA: se $m=-1$ la primitiva non è più una potenza

o anche $f(x)=(x-x_0)^m \Rightarrow \int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^{m+1}}{m+1} & \text{se } m\neq -1 \\ \ln|x-x_0| & \text{se } m=-1 \end{cases}$

$(x_0\in\mathbb{R})$

ALTRO CASO $\quad f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \arctan(x)+c$

o anche $\quad \int \frac{1}{(x-x_0)^2+1}\,dx = \arctan(x-x_0)+c$

$\uparrow$

QUESTO È "IL CASO GENERALE" (+UN PEZZO CON UN $\ln$?)

$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$ se $P(x)$ è di secondo grado e non ha radici reali e $Q(x)$ è di primo grado

VEDIAMO QUESTO CASO: $\quad f(x)=\frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}$

dove $\alpha^2-4\beta<0$. Prendiamo un caso concreto $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+2}$

(e ricordiamoci le operazioni che facciamo!)

I) Per sparire x dal denominatore mediante una traslazione: interpretando i termini di II° e di I° grado come risultanti dallo sviluppo di un quadrato

viene + numero > 0 dato che il Δ era < 0

$$x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{(2x+1)^2+7}{4}$$

DUNQUE $$f(x) = 4\,\frac{x+1}{(2x+1)^2+7}$$

II) DIVIDO IL NUMERATORE IN DUE PEZZI DI CUI:

- il secondo è una costante (non c'è più x)
- il primo è un multiplo della derivata del denominatore

QUINDI devo scrivere

$$4\,\frac{x+1}{(2x+1)^2+7} = \frac{A(8x+4)}{(2x+1)^2+7} + \frac{B}{(2x+1)^2+7}$$

A la scelgo in modo da "far tornare x" $\Rightarrow$ $\boxed{A=1/2}$

$$\frac{4x+4}{(2x+1)^2+7} = \frac{4x+2}{(2x+1)^2+7} + \frac{B}{(2x+1)^2+7} \Rightarrow \boxed{B=2}$$

E QUINDI

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx}\left((2x+1)^2+7\right)}{(2x+1)^2+7}}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{2}{(2x+1)^2+7}}_{f_2(x)}$$

III Posso integrare $f_1(x)$ e

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\left((2x+1)^2+7\right) \overset{+\cos t}{=} \ln\sqrt{4x^2+4x+8} + c$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+x+2}\cdot 2\right)+c = \ln\sqrt{x^2+x+2} + c'$$

(non serve mettere il modulo dato che $x^2+x+2>0 \quad \forall x$)

IV per integrare f_2 devo mettere in evidenza il numero 7 nel denominatore

$$f_2(x) = \frac{2}{7}\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} \Rightarrow$$

$$\int f_2(x)\,dx = \frac{2}{7}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} + \cos t =$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + \cos t.$$

COMMENTO • IN GENERALE, se $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ P, Q polinomi, posso sempre ricondurmi al caso in cui grado Q < grado P (FUNZIONE RAZIONALE PROPRIA) facendo la divisione fra polinomi

$$Q(x) = Q_1(x)\,P(x) + R(x) \quad \text{dove grado } R(x) < \text{grado } P(x)$$

(se grado Q ≥ grado P) ⟹

$$f(x) = Q_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio che so integrare

funz. razionale propria

• Posso assumere che Q(x) e P(x) non abbiano fattori comuni (se li hanno li semplifico : $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$)

Questo corrisponde a dire che P e Q non hanno radici comuni nel campo complesso)

ALTRA SITUAZIONE $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ dove

P ha grado n e ha n radici reali distinte.

Q ha grado $< n$

Vediamo anche in questo caso un esempio (che spiego come si fa nel caso generale)

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x^3-x}$$

$Q(x) = x^2+3x+4$ (grado 2)

$P(x) = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$

grado 3, tre radici $x=0$, $x=1$, $x=-1$

Cerco tre (n nel caso generale) costanti $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \frac{A}{x-0} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

, Per trovare A, B, C

facciamo i calcoli:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)}{x^3-x} =$$

$$\frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x^3-x} \underset{\text{VOGLIO}}{=} \frac{x^2+3x+4}{x^3-x}$$

devono essere eguali i coefficienti!

$$\begin{cases} A+B+C = 1 \\ B-C = 3 \\ -A = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -4 \\ B+C = 5 \\ B-C = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -4 \\ B = 4 \\ C = 1 \end{cases}$$

DUNQUE $\displaystyle \frac{x^2+3x+4}{x^3-x} = -\frac{4}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

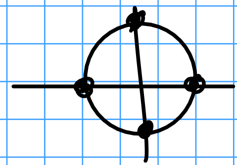
$$\Rightarrow \int \frac{x^2+3x+4}{x^3-x}\,dx = -4\ln|x| + 4\ln|x-1| + \ln|x+1| + c =$$

$$\ln \frac{(x-1)^4}{x^4}|x+1| + \text{cost.}$$

ALTRO ESEMPIO (mescolo i due casi precedenti)

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^4-1} \quad \text{è } \underline{\text{propria}}.$$

Il denominatore ha QUATTRO RADICI DISTINTE IN $\mathbb{C}$

cioè $1, -1, i, -i$,  (le radici $\underline{IV}$ di 1)

quindi $x^4 - 1 = (x-1)(x-i)(x+1)(x+i)$ (in $\mathbb{C}$)

le metto insieme

$$\boxed{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

(lo potevo vedere senza passare da $\mathbb{C}$ dato che $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$)

CERCO DELLE COSTANTI A, B, C, D, tali che

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \underbrace{\frac{\gamma}{x-i} + \frac{\delta}{x+i}}_{\dfrac{Cx+D}{x^2+1}}$$

(γ e δ li troverei coniugati)

con C e D reali.

Faccio i conti

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1} =$$

$$\frac{x^3(A+B+C) + x^2(A-B+D) + x(A+B-C) + (A-B-D)}{x^4-1}$$

eguagliando i coeff. trovo un sistema in A, B, C, D:

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ A-B+D = 1 \\ A+B-C = 0 \\ A-B-D = 4 \end{cases} \quad \text{SOMMO E SOTTR.} \quad \begin{cases} A+B = 0 \\ C = 0 \\ 2D = -3 \\ 2(A-B) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 0 \\ D = -3/2 \\ A+B = 0 \\ A-B = 5/2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5/4 \\ B = -5/4 \\ D = -3/2 \\ C = 0 \end{cases}$$

DUNQUE $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$$\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{3}{2}\arctan(x) + c$$

NOTA la primitiva ha limite finito per $x \to +\infty$ e questo è legato all'integrabilità di f su $[0, +\infty[$ (LO VEDREMO).

CON QUESTE TECNICHE POSSO INTEGRARE FUNZIONI RAZIONALI DEL TIPO $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ quando $P(x)$ HA TUTTE RADICI <u>SEMPLICI</u> (<u>in $\mathbb{C}$</u>). Se in effetti le radici di P sono $x_1 \neq \dots \neq x_k$ REALI $\alpha_1 \pm i\beta_1 \neq \dots \neq \alpha_h \pm i\beta_h$ COMPLESSE (QUELLE COMPLESSE <u>DEVONO</u> COMPARIRE IN COPPIE CONIUGATE)

$$m = k + 2h$$

$$P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k) \underbrace{(x - \alpha_1 - i\beta_1)(x - \alpha_1 + i\beta_1)}_{x^2 - 2\alpha x + \alpha_1^2 + \beta_1^2} \dots$$

$\leftarrow$ pol. di II° grado senza radici reali

Allora posso trovare $A_1 \dots A_k$, $B_1, C_1, \dots B_h\ C_h$

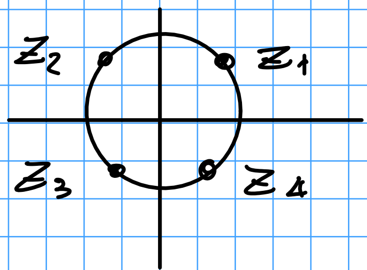
$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{x - x_k} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2} + \dots + \frac{B_h x + C_h}{x^2 - 2\alpha_h x + \alpha_h^2 + \beta_h^2}$$

ESEMPIO

$$\int \frac{x^3+1}{(x^4+1)}\,dx$$

Devo fattorizzare il denominatore come prodotto di due polinomi di II° grado senza radici reali. MI CONVIENE PASSARE PER $\mathbb{C}$

Cerco le radici complesse di $x^4+1=0$ → sono le radici IV di -1



$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ $\qquad z_4 = \overline{z_1}$

$z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ $\qquad z_3 = \overline{z_2}$

$$x^4+1 = (x-z_1)(x-\overline{z}_1)(x-z_2)(x-\overline{z}_2) =$$

$$\Big(x^2 - \underbrace{(z_1+\overline{z}_1)}_{2\,\mathrm{Re}\,z_1 = 2\,\mathrm{Re}\,\overline{z}_1}x + \underbrace{z_1\overline{z}_1}_{|z_1|^2 = |z_2|^2 = 1}\Big)\Big(x - (z_2+\overline{z}_2)x + z_2\overline{z}_2\Big) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\,z_1 = \sqrt{2}$$

$$(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

CERCO ALLORA A B C D tali che

$$\frac{x^3+1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} =$$

$$\frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1} =$$

$$\frac{x^3(A+C)+x^2(B+\sqrt{2}A+D-\sqrt{2}C)+x(A+\sqrt{2}B+C-\sqrt{2}D)+B+D}{x^4+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0 \\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0 \\ B + D = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1-A \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}(1-A)+1-B=0 \\ A+\sqrt{2}B+1-A-\sqrt{2}(1-B)=0 \\ D = 1-B \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 1-A, \quad D = 1-B \\ 2\sqrt{2}A = \sqrt{2}-1 \\ 2\sqrt{2}B = \sqrt{2}-1 \end{cases}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = B$$

$$C = 1-A = \frac{4-2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = D$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx}_{1} + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx}_{2}$$

$$1 = \int \frac{x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-\sqrt{2})}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{+\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}+2}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \underbrace{-\frac{1}{2}+1}_{+\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}+2}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x-\frac{2}{2}\right)^2+1} =$$

$$\ln\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1} + (\sqrt{2}+2)\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} =$$

$$\ln\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{atan}(\sqrt{2}x-1) + \mathrm{cost}.$$

$$2 = \int \frac{x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} =$$

$$\ln\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{(2-\sqrt{2})}{2}\,2\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} =$$

$$\ln\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{atan}(\sqrt{2}x+1) + \mathrm{cost}.$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE $= \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \ln\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1} + \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}\dfrac{(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}} \operatorname{atan}(\sqrt{2}x-1) +$

$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \ln\sqrt{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}\dfrac{(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \operatorname{atan}(\sqrt{2}+1) + \text{cost}$

$= \ln(\sqrt{x^4+1}) + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}} +$ le atan - - — —

$\uparrow$

DIVERGE PER $x \to +\infty$ (è legato al fatto che $\dfrac{x^3+1}{x^4+1} \sim \dfrac{1}{x}$

NON È INTEGRABILE A $+\infty$)

Con quanto visto oggi ~~non~~ so fare $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$

RADICI MULTIPLE

$\longrightarrow$ PROSSIMA VOLTA !