Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventiquattresima lezione, 9 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Calcolo di integrali: Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e F è primitiva di f ($F' = f$), allora $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

$\boxed{\int \cos^2(x)\,dx}$ $\to$ scrivo il $\cos^2(x)$ in termini di $\cos(2x)$.

RICORDIAMO CHE $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ e $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Quindi $\int \cos^2(x)\,dx = \int \dfrac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4} + c =$

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + c$

$\Rightarrow$ (per esempio) $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \left[\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{4}$

ANALOGAMENTE $\int \sin^2(x)\,dx = \int \dfrac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + c$

Altre primitive da sapere

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{asinh}(x) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{acosh}(x)$$

(Ricordiamo che $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$, $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

$\boxed{\text{vale l'identità } \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$. se asinh / acosh le funz. inverse)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\operatorname{asinh}(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{asinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{asinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{acosh}(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{acosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{acosh}(x))-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

---

(1) INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE (~ derivata della funzione composta)

(2) INTEGRAZIONE PER PARTI (~ derivata del prodotto)

(1) Ricordiamo che $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$.

Supponiamo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. (INTEGRABILE) e che

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, sia una primitiva di f $(F' = f)$. Prendiamo

$g : [c,d] \to [a,b]$, derivabile.

Allora $\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t)) \cdot g'(t)$ $\quad (t \in [c,d])$

$= f(g(t)) \cdot g'(t)$

DUNQUE $\boxed{F \circ g \text{ è una primitiva di } (f \circ g)\, g'}$

Dunque (se F è primitiva di f e g è derivabile)

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = F(g(t)) + \text{cost} \text{ "}= \int f(x)\, dx \text{ con } x = g(t)\text{"}$$

Se calcolo $F \circ g$ tra c e d trovo:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \left[F \right]_{g(\ )}^{g(\ )} = \left[F(g) \right]_{a}^{b} = \int_{c}^{d} f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$F(g(d)) - F(g(c))$$

QUINDI (in termini di integrali definiti)

$$\int_{c}^{d} f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx \quad \left(= \int_{a}^{b} f(x)\, dx \ \text{ SE } \begin{array}{l} g(c)=a \\ g(d)=b \end{array} \right)$$

<u>IDEA:</u> se uso la "sostituzione" $x = g(t)$ $\Rightarrow$ dx diventa $g'(t)\,dt$

SE INOLTRE g è invertibile, allora posso scrivere:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

CONSEGUENZE

- $\displaystyle\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\, dx \quad \left(= \int f(g(x))\, g'(x) \ \text{ dove } \ f(y) = \frac{1}{y} \quad g(x) = \cos(x) \right)$

$$= \int -\frac{1}{y}\, dy \quad \text{dove } y = \cos(x) = -\ln|\cos(x)| + c$$

- $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad x = \sin(t) \quad (\ dx = \cos(t)\,dt)$$

$$\| $$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt \qquad \left(\text{potevo anche mettere } \int_0^{\frac{5}{2}\pi}\right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} |\cos(t)|\,\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt \quad \text{PERCHÉ } 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} \ (\text{fatto prima})$$

- $$\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx$$ uso la sostituzione $x = \cosh(t) \Rightarrow$
$dx = \sinh(t)\,dt$

$$= \int_0^{\operatorname{acosh}(2)} \sqrt{\cosh^2(t)-1}\,\sinh(t)\,dt = \int_0^B \sinh^2(t)\,dt \qquad (B = \operatorname{acosh}(2))$$

USO LA FORMULA $\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 1 + 2\sinh^2(t)$

$$\rightarrow \int_0^B \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \left[\frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2}\right]_0^B = \left[\frac{\sinh(t)\cosh(t)}{2} - \frac{t}{2}\right]_0^B =$$

$$\frac{\sinh(B)\cosh(B)}{2}-\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{\cosh^2(B)-1}\,\cosh(B)}{2}-\frac{B}{2}=$$

$$\frac{\sqrt{2^2-1}\cdot 2}{2}-\frac{\operatorname{acosh}(2)}{2}=\sqrt{3}-\frac{\operatorname{acosh}(2)}{2}$$

SE AL POSTO DI 2 METTO UNO GENERICO X TROVO L'INT. INDEF.

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{acosh}(x)+c$$

OSS Abbiamo dimostrato che:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\boxed{\text{è integrabile e ha una primitiva } F,}$ ~~,~~ ci vorrei f continua

se $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ è derivabile, allora

$$\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt=\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$$

(2) Partiamo dalla derivazione del prodotto: $(f\cdot g)'=fg'+f'g$

Supponiamo di avere $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili, entrambe dotate di una primitiva F, G $(F' = f, G' = g)$

(vedremo poi che per questo basta f, g continue)

Applicando la derivata del prodotto a $F \cdot G$ ho:

$$(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$$

cioè $\underbrace{FG}$ È UNA PRIMITIVA DI $\underbrace{fG + Fg}$, o anche

$$\int fG\,dx + \int Fg\,dx = F \cdot G \iff$$

$$\boxed{\int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,dx}$$

Quindi per applicare tale formula devo "riconoscere" nell'integrando due fattori: uno f di cui so la primitiva F
uno G che dovrò derivare.

Se calcolo l'espressione sopra tra a e b

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

ESEMPIO

$$\int \ln|x|\,dx = \int \underset{\substack{\uparrow\\ f(x)}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ G(x)}}{\ln|x|}\,dx = \qquad \left(\Rightarrow F(x)=x \;,\; g(x)=\frac{1}{x}\right)$$

$$= x\ln|x| - \int \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= x\ln|x| - x + c$$

ANALOGAMENTE

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ f(x)}}{x^n} \underset{\substack{\uparrow\\ G(x)}}{\ln|x|}\,dx = \frac{x^{n+1}\ln|x|}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{n+1}\right) + c$$

$$\left(F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad G(x) = \frac{1}{x} \right)$$

(DUNQUE POSSO SEMPRE CALCOLARE $\int P(x)\ln(x)\,dx$ se P è un polinomio)

o anche $\displaystyle\int x^{\alpha}\ln|x|\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln|x| - \frac{1}{\alpha+1}\right)$ PURCHÉ $\alpha \neq -1$

Se invece $\alpha = -1$, cioè se devo calcolare

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\ln|x|\,dx$ uso la sostituzione $\ln|x| = t$ viene

$f(y) = y \qquad g(x) = \ln|x| \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + \text{cost.} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln^2 x + \text{cost.}$$

ALTRO MODO DI FARE $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ con $a>0$

(facendo come prima dovrei sostituire $x = a\sin(t)$ ...)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$\frac{a^2}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} - \int x\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

1   2

NOTO che 1 $= a^2 \arcsin(x/a)$ e che

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \int x\,\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = \text{(per parti)}$$

$$a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

!! però c'è il meno

(lo rimando a sx)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + \text{cost.}$$

(NELLO STESSO MODO SI PUÒ FARE $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ / $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$)

$$\int \underset{G(x)}{x}\, \underset{f(x)}{e^{2x}}\,dx = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = x\,\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

ANALOGAMENTE SI INTEGRA $\int P(x)e^{ax}$ dove P è un polinomio e $a \neq 0$

$\rightarrow$ la primitiva viene $Q(x)e^{ax}$ per un altro polinomio $Q(x)$ dello stesso grado di $P(x)$

<u>NOTA</u> Se voglio $\int (3x^2+x-5)e^{3x}\,dx$ posso anche cercare $Q(x) = ax^2+bx+c$ in modo che $\frac{d}{dx}Q(x)e^{3x} = (3x^2+x-5)e^{3x}$

: $\frac{d}{dx}\,Q(x)\,e^{3x} = (2ax+b+3ax^2+3bx+3c)\,e^{3x} =$

$\iff$ $3a=3$, $2a+3b=1$, $b+3c=-5$ $\Rightarrow$

$a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \text{---}$

$\int \sin(x)\, e^{-x}\, dx =$ (per parti, è indifferente derivo / integro e^{-x})

$-\cos(x)\, e^{-x} - \int \left(-\cos(x)\right)\left(-e^{-x}\right) dx =$

$-\cos(x)\, e^{-x} - \int \cos(x)\, e^{-x}\, dx =$ (di nuovo per parti)

$$-\cos(x)\, e^{-x} + \sin(x)\, e^{-x} - \underbrace{\int \sin(x)\, e^{-x}\, dx}_{\text{l ribalto a sx}} \iff$$

$$\int \sin(x)\, e^{-x}\, dx = \frac{e^{-x}}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + \text{cost.}$$