Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventitreesima lezione, 03 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Alcune precisazioni (riguardo alle definizioni)

La def. (1) si può dire in modo più esplicito, come segue:

Def. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $I \in \mathbb{R}$. Dico che è integrabile e il suo integrale è I se:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \bar{n}$ intero tale che:

$\forall n \geq \bar{n}$, $\forall\ t_1 \dots t_n$ tali che $t_i \in \Big[\overbrace{a + \frac{i-1}{n}(b-a)}^{x_{i-1}}, \overbrace{a + \frac{i}{n}(b-a)}^{x_i}\Big]$

si ha che $\displaystyle \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_i) - I \right| < \varepsilon$

Esplicitiamo anche la def (2) (sappiamo già cosa sono $S(\sigma)$ e $s(\sigma)$ per σ suddivisione)

Def. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora si dice che f è integrabile se

$\forall \varepsilon > 0$ esiste una suddivisione σ $(= \{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}} < x_1 < \dots < \overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}}\})$

tale che $S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon$

Se f è integrale pongo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_\sigma s(\sigma) = \inf_\sigma S(\sigma)$$

questo "=" segue dall'integrabilità.

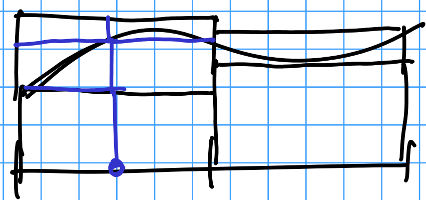
(NO DIM.)

<u>OSS.</u> Vale il seguente fatto (che si usa se si vuole dim. l'equivalenza tra (1) e (2))

Se σ_1 e σ_2 sono suddivisioni di $[a,b]$ e se σ_1 <u>È PIÙ FINE</u> di σ_2, cioè σ_1 contiene (tutti i punti di) σ_2 $\Longrightarrow$

$$s(\sigma_2) \le s(\sigma_1) \quad ; \quad S(\sigma_1) \le S(\sigma_2)$$

"raffinando" le suddivisioni le somme inferiori aumentano e le somme superiori diminuiscono



<u>CONSEGUENZA</u> Date σ_1 e σ_2 suddivisioni qualunque

$\Rightarrow \quad S(\sigma_1) \geq s(\sigma_2)$ (non è immediato come nel caso $\sigma_1 = \sigma_2$)

Per vederlo basta considerare $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ (σ contiene tutti i punti di σ_1 e di σ_2); σ è più fine di σ_1 e di σ_2. Allora

$$S(\sigma_1) \geq S(\sigma) \geq s(\sigma) \geq s(\sigma_2)$$

DA QUESTO SI PUÒ DEDURRE

$$\boxed{\sup_{\sigma} s(\sigma) \leq \inf_{\sigma} S(\sigma)}$$

(in generale se $F(x) \leq G(x)$ NON È DETTO CHE

$$\sup F \leq \inf G \quad \leftarrow \text{NO}$$

Però se $F(x) \leq G(y) \quad \forall x\, y$ questo è vero) si

Potrei quindi definire PER OGNI FUNZIONE limitata

$$\int_{a*}^{b} f(x)\,dx = \sup_{\sigma} s(\sigma) \quad ; \quad \int_{a}^{b*} f(x)\,dx = \inf_{\sigma} S(\sigma)$$

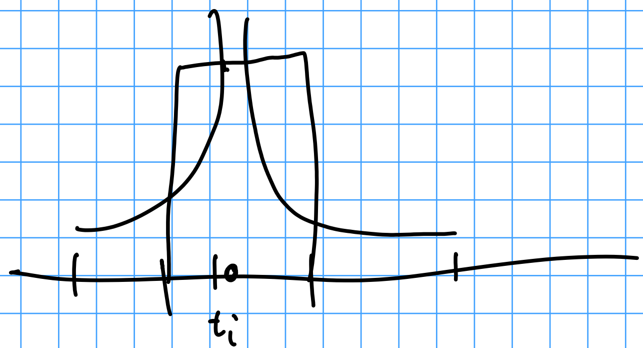
INTEGRALE INFERIORE $\leq$ INT. SUPERIORE

Se questi coincidono la funzione è integrabile e l'integrale è il valore comune.

Vale il teorema (NO DIM.)

<u>Teorema</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

a) Se f è integrabile secondo la (*) $\Rightarrow$ f è limitata



b) f è int. nel senso (1) $\Leftrightarrow$ f è int. nel senso (2).

Riguardo all'integrabilità delle funzioni continue. La dim è "profonda"

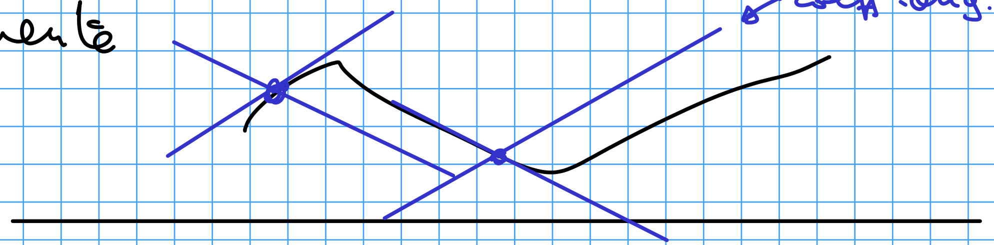
In realtà le funzioni continue "generiche" sono più "cattive" di quanto ci si potrebbe aspettare.

Vediamo la dim. dell'integrabilità in un caso particolare

Def. Dico che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è "lipschitziana" di costante L se

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \qquad \forall\, x,y \in [a,b]$$

la scarto tra $f(x)$ e $f(y)$ si controlla "linearmente" con lo scarto tra x e y. Graficamente



il coeff della retta tra $(x, f(x))$ e $(y, f(x))$ è compreso tra $-L$ ed L

Fatto Se f è derivabile $\Longrightarrow$ f è lipschitziana con

$$L = \max_{a \le x \le b} |f'(x)| \quad \text{(se non c'è il max usare sup.)}$$

Infatti presi $x \neq y$ si ha (uso Lagrange)

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(t) \qquad \text{per } t \text{ (opportuno) tra } x \text{ e } y$$

faccio il modulo

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(t)| \le L \iff |f(x)-f(y)| \le L|x-y|$$

Vediamo allora che le funzioni Lip sono integrabili

- Sia f tale che $|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y|$.
- Sia n intero prendiamo

$$x_0 = a, \; \dots \; x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i, \dots, x_n = b$$

$$\sigma_n = \{x_0 < x_1 < \quad < x_n\}$$

e per $i = 1 \dots n$ consideriamo

$$x'_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ tale che } f(x'_i) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f = m_i$$

$$x''_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ tale che } f(x''_i) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f = M_i$$

- Calcoliamo somme inferiori / superiori:

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f(x'_i) \quad ; \quad S(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f(x''_i)$$

$$\Rightarrow \quad S(\sigma_n) - s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} \underbrace{\left(f(x''_i) - f(x'_i)\right)}_{\text{posso pensare che ci sia il modulo}} \leq$$

devo dire in che modo questo pezzo va a zero.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} L \, |x''_i - x'_i| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) L \left(\frac{b-a}{n}\right) = L \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot n = \frac{L(b-a)^3}{n}$$

(n: numero di addendi)

Dunque $\lim_{n \to \infty} S(\sigma_n) - s(\sigma_n) = 0 \Rightarrow$ TESI.

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

<u>Teorema</u> Se f, g sono integrabili, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$\alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

<u>LINEARITÀ</u> dell'integrale. (NO DIM.)

<u>Teorema</u> Se $f \geq 0$, f integrabile $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

<u>Dim.</u> Se $\sigma_0 = \{a, b\} \Rightarrow s(\sigma_0) = (b-a) \inf f \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq s(\sigma_0) \geq 0$

<u>Di CONSEGUENZA:</u> Se $f \geq g$, f e g integrabili $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

(MONOTONIA)

Infatti: $f \geq g \iff f - g \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \geq 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

__Teorema__ (additività "rispetto alla base"). Siano $a < b < c$ e $f : [a,c] \to \mathbb{R}$. Allora

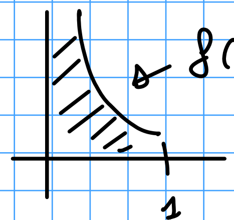
(I) f integrabile su $[a,c]$ $\Longleftrightarrow$ f è int. su $[a,b]$ e su $[b,c]$

(II) Se f è int. su $[a,c]$ $\Longrightarrow$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

__Teorema__ Se f, g int. $\Longrightarrow$ $f \cdot g$ è integrabile

(ATTENZIONE: questa proprietà non vale più nel caso degli "integrali impropri", di cui parleremo più avanti.



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è int. in senso improprio ma $f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x}$ NON LO È)

(NO DIM)

Teorema (di composizione) Se $G(t)$ è una funzione lipschitziana allora per ogni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile la composizione $G(f(x))$ è integrabile. (basta che G sia Lip. su $J = f([a,b])$)

(NO DIM.)

CASO Particolare: Se f integrabile $\Rightarrow$

$|f|$ è integrabile

f^+ " "

f^- " "

dove, se $x \in \mathbb{R}$,

$$x^+ \text{ (parte positiva di } x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$x^- \text{ (parte negativa di } x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

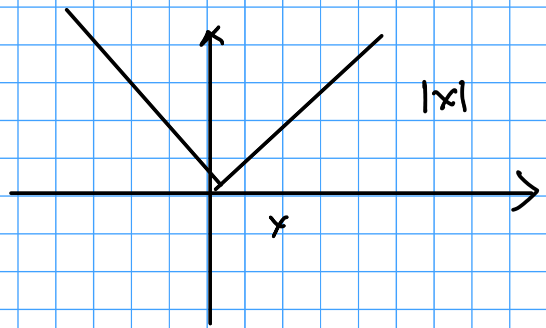
quindi x^+, x^- sono ≥ 0, $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$

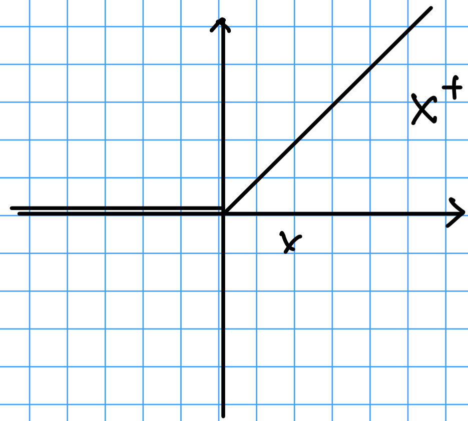
Sono tutte lipschitziane di costante 1 (si VEDE ...)

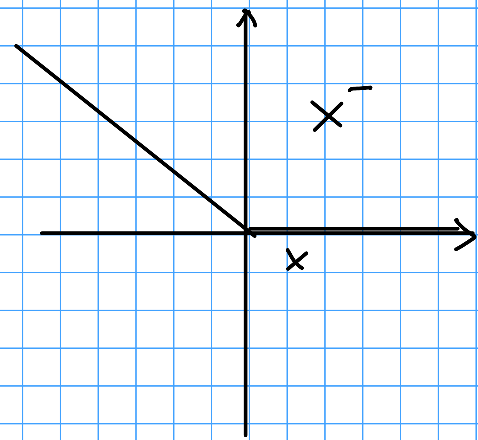
$$||x|-|y|| \leq |x-y| \qquad \forall x, y$$

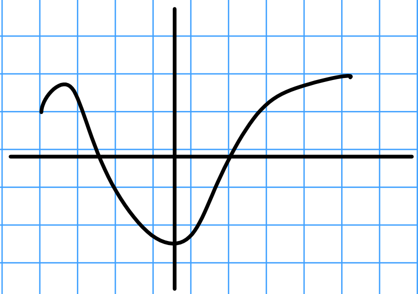
$$|x^+ - y^+| \leq |x-y|$$

$$|x^- - y^-| \leq |x-y|$$

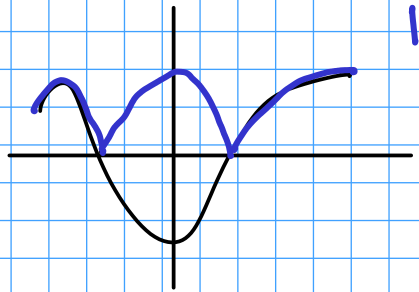




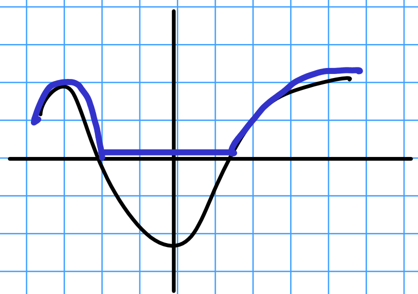




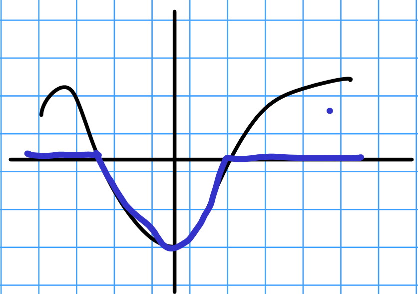
$f(x)$



$|f(x)|$



$f^+(x)$



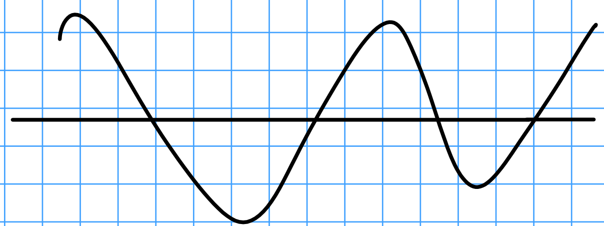
$f^-(x)$

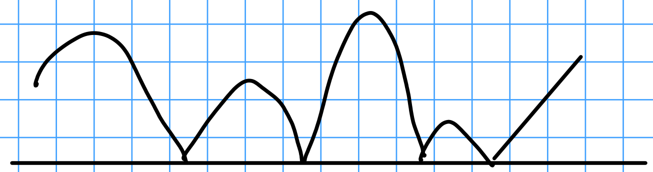
Inoltre $\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b \left(f^+(x) + f^-(x)\right)dx =$

$$\int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx \geq$$

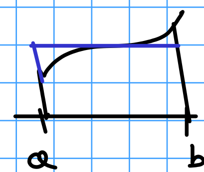
$$\geq \begin{cases} -\int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \\ \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \end{cases}$$

QUINDI
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$





Teorema della media integrale: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (dunque limitata). Chiamo "media integrale" di f su $[a,b]$ il numero
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \fint_a^b f(x)\,dx \right).$$



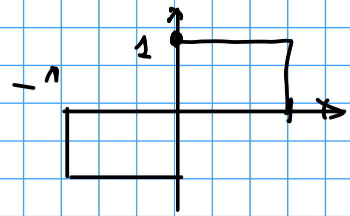
Allora si ho:

(1) $$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f$$

(2) se f è continua esiste un punto $t \in [a,b]$ tale che

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(se f non è continua (2) può essere falso:



medio $=0$ ma $f(x) \neq 0 \ \forall x$)

<u>Dim.</u> Se $M = \sup_{[a,b]} f$ e $m = \inf_{[a,b]} f$, allora

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow$ (monotonia) $$\underbrace{\int_a^b m\,dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)}$$

Oss. Il fatto che $\int_a^b 1\,dx = b-a$ si deve dedurre dalla definizione. In effetti se $f(x) = 1\ \forall x$ si vede facilmente che

$$S(\sigma) = b-a \qquad s(\sigma) = b-a \qquad \forall\, \sigma \text{ suddivisione}$$

$$\Rightarrow \int_a^b 1\,dx = b-a$$

Divido per $b-a$ e trovo
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \qquad (\text{cioè } (1))$$

Se poi f è continua $\left(M = \max_{[a,b]} f,\ m = \min_{[a,b]} f \right)$

uso il teorema dei valori intermedi e trovo $t \in [a,b]$ in cui

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Def. Date $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dico che F è primitiva (o antiderivata) di f se F è derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

· Al momento non so che condizioni su f mi garantiscono che f abbia primitive. Quello che posso dire facilmente è:

<u>Teorema</u> Se $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se F è primitiva di f, allora

$$\{ G \text{ tali che } G' = f \} = \{ F + c \text{, al variare di } c \in \mathbb{R} \}$$

<u>Dim.</u> L'uguaglianza "=" corrisponde a "$\subset$" + "$\supset$",

<u>dimostriamo che vale "$\supset$"</u>, cioè che se $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ è una primitiva. In effetti $(F + c)' = F' + \underset{0}{\underset{\parallel}{c'}} = F' = f$ <u>OK</u>

<u>dimostriamo che vale "$\subset$"</u>; per questo devo far vedere che

se G è primitiva di f $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ per cui $G = F + c$.

Sia G tale che $G' = f$. Chiamo $H = G - F$. Allora $H' = G' - F'$ $= f - f = 0$. Sappiamo dai teoremi sulle derivate (conseguenze di Lagrange) che $H(x) =$ costante, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R} : H(x) = c \;\; \forall x$

Tornando indietro ho dim. che $G(x) = F(x) + c$.

Dunque se c'è una primitiva ce ne sono infinite - PERÒ se ne conosco una conosco tutte le altre aggiungendo una costante.

Teorema fondamentale del calcolo integrale I

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e supponiamo che $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia primitiva di f (cioè che $F' = f$).

ALLORA: $$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{F(b) - F(a)}$$

<u>Dim.</u> (Uso la def. di integrale (1)). Dato $n \in \mathbb{N}$ divido $[a,b]$ in n parti eguali, introducendo $x_0 < x_1 \dots < x_n$ $\left(x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \right)$

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \Big(F(x_n) - F(x_{n-1})\Big) + \Big(F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\Big) + \dots =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) =$$

(applico Lagrange su ogni $[x_{i-1}, x_i]$) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F'(t_i)(x_i - x_{i-1})$

per opportuni punti $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$ $\displaystyle = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$

DUNQUE, per ogni n esiste $t_1 \dots t_n$ tali che $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e

$$F(b) - F(a) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i-1} - x_i)}_{\text{SOMMA DI Cauchy-Riemann di ordine } n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Se ne ricava $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Def.</u> (integrale indefinito) Chiamo "integrale indefinito" di f

l'insieme di tutte le primitive di f, e lo indico con

$$\int f(x)\,dx \qquad \left(= \{F + c\} \text{ dove } F \text{ è una primitiva particolare} \right)$$

Ad es. $\displaystyle \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$ (non metto le graffe |

Usando il teorema Fondam. si ritrova l'area del segmento di parabola

$$\int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \quad \text{dove} \quad F(x) = \frac{x^3}{3}$$

(se aggiungo c questo sparisce nella differenza!)

NOTAZIONE Scrivo $\Big[\, F(x) \,\Big]_{x=a}^{x=b}$ oppure $\Big[\, F \,\Big]_a^b$ per indicare

$$F(b) - F(a)$$

quindi $$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

A questo punto è importante fare una "tabella" di primitive note

e sviluppare un "calcolo" per trovare primitive "non evidenti"

NOTA Mentre la derivazione di funzioni "elementari"

(polinomi / f. trigonom. / espon. e loro "combinazioni") produce sempre alte funzioni elementari, NON VALE IL VICEVERSA.

NON È SEMPRE POSSIBILE esprimere la primitiva di una funzione elementare in termini elementari (lo vedremo)

PRIMITIVE

FUNZIONE | PRIMITIVA

(1) $f(x) = x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

A PATTO CHE $\alpha \neq -1$ (cioè se f non è $\frac{1}{x}$)

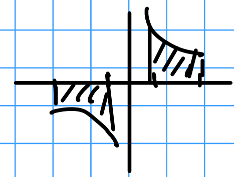
(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln|x| + c$

in effetti se $x > 0$ ho $F(x) = \ln(x) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{x}$

se $x < 0$ ho $F(x) = \ln(-x) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{-x} \cdot -1 = \dfrac{1}{x}$

A SECONDA DEI CASI SI SCEGLIE IL SEGNO!

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^2 = \ln(2)$$



$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(-x)\Big]_{-2}^{-1} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$$

(3) $f(x) = e^{ax} \implies F(x) = \dfrac{e^{ax}}{a} + c$

(4) $f(x) = \sin(ax)$, $g(x) = \cos(ax) \implies F(x) = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + c$, $G(x) = \dfrac{\sin(ax)}{a} + c$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \implies F(x) = \arctan(x) + c$

$f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2} \implies F(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \implies F(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$

Se ho una funzione che non sta nella tabella devo cercare di esprimerla in termini di quelle della tabella (oppure . . .)

ESEMPIO

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx$$

USO LE FORMULE TRIGONOMETRICHE :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \iff$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c =$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + c$$

. Dunque

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx = \left[\frac{x}{2} + \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{0}{2} + \sin(\pi) - \sin(0) = \frac{\pi}{4}$$