Analisi Matematica I

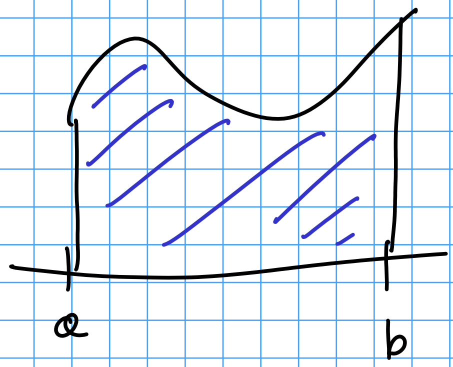
prof. Claudio Saccon (*)

Ventiduesima lezione, 2 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Integrali $\longrightarrow$ AREA DI UNA FIGURA ...

Data una funzione f definita su un intervallo $[a,b]$



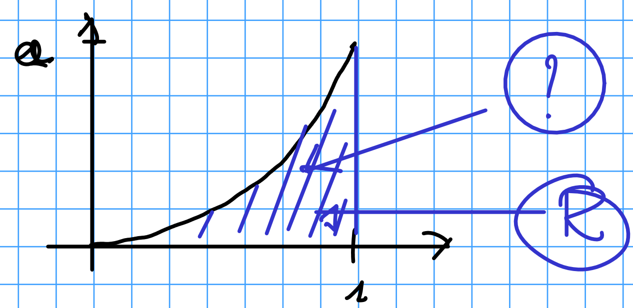
MI CHIEDO (COSA È E) quanto fa l'area della figura compresa tra l'asse x, il grafico di f, e le rette $x=a$, $x=b$

FATTO DI BASE: i rettangoli hanno un'area = base × altezza

$\leadsto$ i poligoni hanno un'area (che si calcola ....)

ESEMPIO (NON POLIGONO): L'area del segmento di parabola

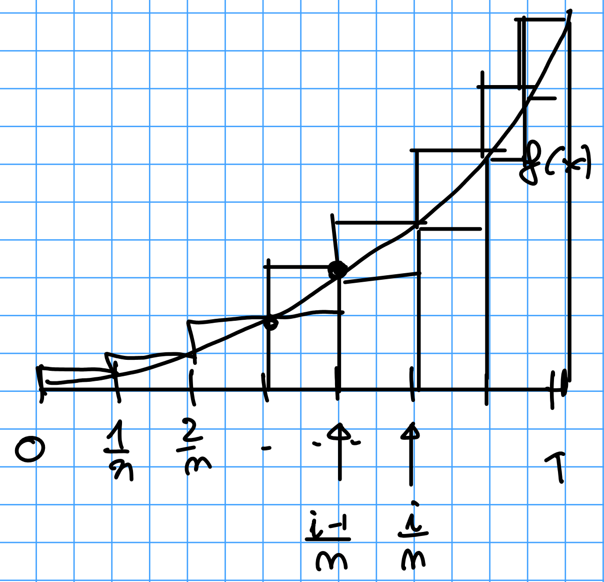
$f(x) = a x^2$, sull'intervallo $[0,1]$



USEREMO: SE $A \subset B$ sono due insiemi $\Rightarrow$ Area $(A) \leq$ Area (B)

Cerco l'area della regione R mediante un "procedimento di esaustione"

Divido $[0,1]$ in n sottointervalli (eguali) di ampiezza $\frac{1}{n}$



per ogni i ho un punto $\boxed{x_i = \frac{i}{n}}$ $i=0,\dots,n$

$\forall i=1..n$ Posso considerare il rettangolo:

- R_i^2 di base $[x_{i-1}, x_i]$ e di altezza $f(x_i)$

- R_i^1 di base $[x_{i-1}, x_i]$ e di altezza $f(x_{i-1})$

Chiamo P_n^2 = unione di tutti i rettangoli R_i^2 $i=1\dots,n$

P_n^1 = unione di tutti i rettangoli R_i^1 $i=1,\dots,n$

PER COSTRUZIONE $P_n^1 \subset R \subset P_n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Se esiste "Area (R)" deve essere

$$a_n := \text{Area}(P_n^1) \leq \text{Area}(R) \leq \text{Area}(P_n^2) =: A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Facciamo i calcoli: $a_n = \sum_{i=1}^{n} \text{Area}(R_i^{1,n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot a\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 =$

BASE ALTEZZA

$$\frac{a}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{a}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{a}{n^3} \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}$$

(quello sotto con n-1 al posto di n)

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \text{Area}(R_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a \frac{i^2}{n^2} = \frac{a}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{a}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

DUNQUE

$$\frac{a}{6} \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{n^3} \leq \text{Area}(R) \leq \frac{a}{6} \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} \quad \forall n \geq 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{a}{3} \qquad\qquad\qquad \frac{a}{3}$$

Quindi $\text{Area}(R) = \frac{a}{3}$

PER UNA DEFINIZIONE GENERALE:

Prendo una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (LIMITATA)

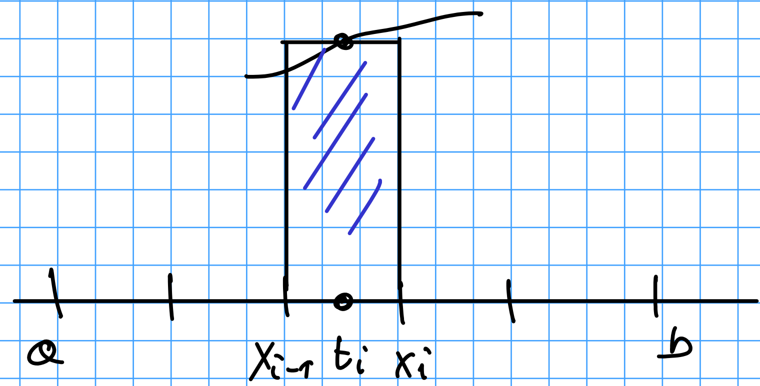
Divido $[a,b]$ in n sottointervalli di ampiezza eguale $\frac{b-a}{n}$

(quindi introduciamo i punti $x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$)

Per ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ prendo un punto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

("a caso"). Fatto questo considero l'espressione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(t_i) = S_n$$



(somma di Cauchy-Riemann)

Definizione Se avviene che:

$$I = \lim_{n \to \infty} S_n$$ esiste finito e non dipende dalla scelta dei $t_1 \dots t_n$

dico che f è integrabile e chiamo integrale il limite I della sopra

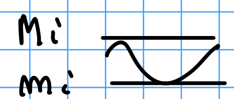
Tale integrale si indica con $\int_a^b f(x)\,dx$ (x è una "variabile muta")

DEFINIZIONE ALTERNATIVA: Data $f: [a\ b] \to \mathbb{R}$ limitata

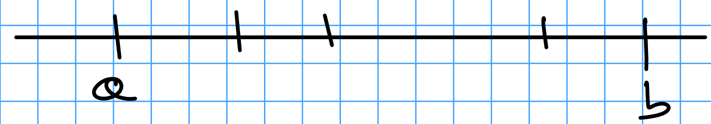
Prendo una qualunque suddivisione $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ (non necessariamente "equispaziata"). Per ogni $i = 1 \dots n$ considero

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \qquad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

(ci vuole f limitata, se no trovo degli infiniti)



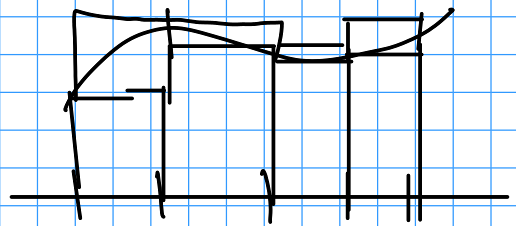
e chiamo



somma inferiore $s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$

somma superiore $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i$

(tutte dipendono da σ)



__Definizione__ Dico che f è __integrabile__ se:

$$\sup\{s(\sigma) : \sigma \text{ suddivisione}\} = \inf\{S(\sigma) : \sigma \text{ suddivisione}\}$$

Se questo avviene chiamo integrale, $\int_a^b f(x)\,dx$, il valore comune

__FATTO__ Le due definizioni sono equivalenti. (NO DIM.)

__Controesempio__: la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Prendiamo una qualunque suddivisione $\sigma = \{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}} < x_1 < \cdots < \overset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}}\}$

prendiamo i tra 1 e n e consideriamo l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$

dentro questo intervallo trovo un razionale $\Rightarrow$ $M_i = 1$

" " " " " irrazionale $\Rightarrow$ $m_i = 0$

Allora, qualunque sia σ $\quad S(\sigma) = b-a$, $s(\sigma) = 0$

f <u>NON È</u> INTEGRABILE

$$\inf_\sigma S(\sigma) = b-a > \sup_\sigma s(\sigma) = 0$$

DIVENTA IMPORTANTE CAPIRE QUALI FUNZIONI SONO INTEGRABILI.

<u>Fatti:</u>

(1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ f integrabile

(2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona $\Longrightarrow$ f integrabile

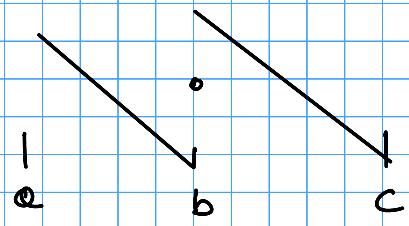
(3) $a < b < c$, $\quad f : [a,c] \to \mathbb{R}$ tale che

f integrabile su $[a,b]$ e f integrabile su $[b,c]$ $\Longleftrightarrow$

f integrabile su $[a, c]$ e $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

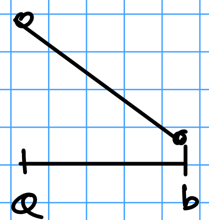
(4) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è tale che $g(x) = f(x)$ per ogni x tranne un numero finito di punti $\Longrightarrow$ g è integrabile e $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$f(x) \rightarrow$

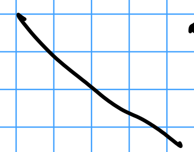


f è integrabile: lo vedo usando i risultati scritti sopra

$f_1(x) =$

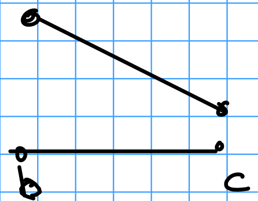


INTEGRABILE $\Longrightarrow$

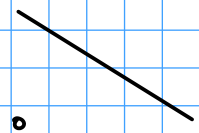


f_1 MODIFICATA IN UN PUNTO
$\downarrow$
INTEGRABILE

$f_2(x) =$



INTEGRABILE

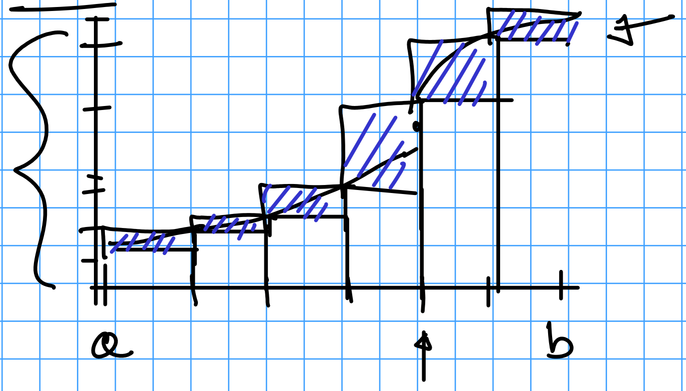


f_2 MODIFICATA IN UN PUNTO
INTEGRABILE

$\Longrightarrow$ f è integrabile dato che si ottiene "incollando" funzioni integrabili

e inoltre $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx$

DIM. (2) : INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE. — f CRESCENTE (per es.)



Fisso $n \in \mathbb{N}$ e divido $[a,b]$ in n sottointervalli equispaziati di ampiezza $\frac{b-a}{n}$: $x_i = a + i\,\frac{(b-a)}{n}$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = f(x_i) \qquad \text{(è un massimo!)}$$

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = f(x_{i-1}) \qquad \text{(è un minimo)}$$

Calcoliamo S_n e s_n :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_i) \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_{i-1})$$

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big) = \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)}_{f(b)-f(a)}$$

$$= \frac{(b-a)}{n}\Big(f(b) - f(a)\Big)$$ TENDE A ZERO se $n \to \infty$

QUESTO DIMOSTRA L'INTEGRABILITÀ ! a causa del seguente risultato

<u>Fatto generale</u> Se trovo una successione di suddivisioni $\{\sigma_n\}$ tali che $S(\sigma_n) - s(\sigma_n) \to 0 \implies f$ è integrabile.

Infatti: chiamo $S = \inf_{\sigma} S(\sigma)$ $s = \sup_{\sigma} s(\sigma)$

è chiaro che $s \leq S \leq$ (andrebbe dimostrato ma ci fidiamo)

inoltre $s(\sigma_n) \leq s$ e $S \leq S(\sigma_n)$

Se $S(\sigma_n) - s(\sigma_n) \to 0$ NECESSARIAMENTE $S - s = 0$

DIAMO PER BUONA LA DIM. DI (3).

VEDIAMO IL PUNTO (4). :

Se f è integrabile su $[a,b]$, se $g(x) = f(x)$ $\forall x$ eccetto $x = a$

$\implies$ g è integrabile e $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Dim.</u> Dal fatto che f è integrabile segue che

$$\sup_{\sigma} s_f(\sigma) = \inf_{\sigma} S_f(\sigma)$$

Prendiamo una qualunque $\sigma = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$

$$s_g(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i(g) \qquad m_i(g) = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} g(x)$$

$$S_g(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i(g) \qquad M_i(g) = \sup \ ''$$

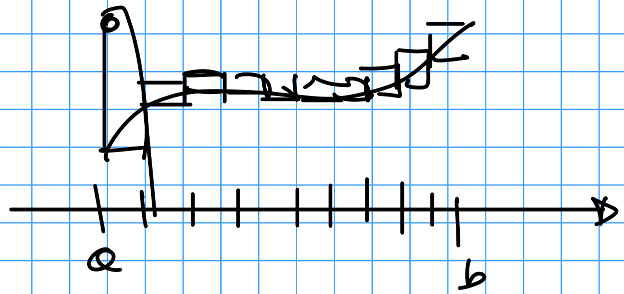
$$S_g(\sigma) - s_g(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \big(M_i(g) - m_i(g)\big)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$S_f(\sigma) - s_f(\sigma) + (x_1 - x_0)\big(\text{massimo scarto di } f \text{ e } g \text{ in } [x_0, x_1]\big)$$

se scelgo la σ in modo che $x_1 - x_0 \to 0$ e in modo che $S_f(\sigma) - s_f(\sigma) \to 0$
(f INTEGRABILE)

$\Rightarrow$ posso far diventare $S_g(\sigma) - s_g(\sigma)$ piccolo quanto voglio $\Rightarrow$ g è integrabile.

Nello stesso modo vedo che $S_f(\sigma)$ e $S_g(\sigma)$ HANNO LO STESSO inf / $s_f(\sigma)$ $s_g(\sigma)$ hanno lo stesso sup $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$


a
b