Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventunesima lezione, 17 dicembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - \sqrt[4]{1-8x^2}}{x^4}$$

Proviamo a fare il limite mediante Taylor: mi interessano i termini al più fino a x^4 (visto il denominatore).

RICORDIAMO

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4) \quad ; \text{ metto } y = 2x$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{1}{4}y + \binom{1/4}{2} y^2 + o(y^2) = 1 + \frac{y}{4} - \frac{3}{32}y^2 + o(y^2)$$

$$\binom{1/4}{2} = \frac{1/4\,(1/4-1)}{2} = \frac{3}{32}$$

$$\sqrt[4]{1-8x^2} = 1 - \frac{8x^2}{4} - \frac{3}{32}64x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 - 6x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - \sqrt[4]{1-8x^2}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \cancel{1} + \cancel{2x^2} + 6x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{20}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{20}{3}$$

- Proviamo con de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-(1-8x^2)^{1/4}}{x^4} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)-\frac{1}{4}(1-8x^2)^{-\frac{3}{4}}(-16x)}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8(1-8x^2)^{3/4}\sin(2x)+16x}{4\cdot 4x^3(1-8x^2)^{3/4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1-8x^2)^{3/4}\sin(2x)+2x}{2x^3} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{4}(1-8x^2)^{-\frac{1}{4}}(-16x)\sin(2x)-2(1-8x^2)^{3/4}\cos(2x)+2}{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12x\sin(2x)-2(1-8x^2)\cos(2x)+2(1-8x^2)^{1/4}}{(1-8x^2)^{1/4}\,6x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x\sin(2x)-(1-8x^2)\cos(2x)+(1-8x^2)^{1/4}}{3x^2} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\sin(2x)+12x\cos(2x)+16x\cos(2x)+(1-8x^2)2\sin(2x)+\frac{1}{4}(1-8x^2)^{-\frac{3}{4}}(-16x)}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(8-16x^2)+\cos(2x)28x-4x(1-8x^2)^{-3/4}}{6x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)(8-16x^2)}{6x} + \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\cdot 28 - 4(1-8x^2)^{-3/4}}{6} =$$

$$\frac{\overset{1}{2}\cdot 8}{6} + \frac{28-4}{6} = \frac{16+24}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(2x)+\cos(x)) - 2x}{1-\sqrt{\cos(3x)}}$$ (uso Taylor)

COMINCIO DAL DENOMINATORE

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \Rightarrow \cos(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y)$$; prendo $y = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2)$

$$\sqrt{\cos(3x)} = \sqrt{1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) + o\left(-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{2}o(x^2) + o(O(x^2)) = 1 - \frac{9}{4}x^2 + o(x^2)$$

DENOMINATORE $= \frac{9}{4}x^2 + o(x^2)$

AL NUMERATORE POSSO FERMARMI AL II° ORDINE

$$\sin(2x) + \cos(x) = 2x + o(x^2) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(\sin(2x) + \cos(x)) = \ln\Big(1 + \underbrace{2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{y}\Big) =$$

(uso $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$)

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \frac{1}{2}\left(2x + o(x)\right)^2 + o\left(O(x)^2\right) =$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \frac{1}{2}\Big(4x^2 + \underbrace{4x\,o(x)}_{o(x^2)} + \underbrace{o(x)^2}_{o(x^2)}\Big) + o(x^2) =$$

$$= 2x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

si può anche fare

$$(2x)^2\left(1 + o(1)\right)^2 = 4x^2\left(1 + o(1)\right) = 4x^2 + o(x^2)$$

DUNQUE

$$\frac{\ln(\sin(2x) + \cos(x)) - 2x}{1 - \sqrt{\cos(3x)}} = \frac{-\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{9}{4}x^2 + o(x^2)} \to -\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{9} = -\frac{10}{9}$$

ABBIAMO VISTO CHE, se f HA m derivate vicino a x_0

$$\boxed{f(x) = P_m(x) + o\left((x-x_0)^m\right)}$$

dove $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$

Espressione "secondo Peano" del resto: se chiamo resto la differenza $f(x) - P_m(x) =: R_n(x)$

Peano afferma che $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^m} \to 0$ (cioè $R_n(x) = o((x-x_0)^m)$)

Ci sono altri modi di valutare R_n (cioè di dire in che senso P_m approssima f)

PROBLEMA Abbiamo visto che, se $x_0 = 0$ $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \qquad \forall n$$

Peano: $R_n(x) = o(x^n)$

SE FISSO x e mando $n \to \infty$ COSA SUCCEDE ?

PEANO NON SERVE !!

(FINORA ABBIAMO FISSATO n e mandato $x \to 0$)

SERVE Lagrange :

TEOREMA Se f ha $n+1$ derivate vicino a x_0

Allora, dato $x \neq x_0$, esiste un punto t compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

("spendo" la derivata $n+1$ per avere una stima di $R_n(x)$)

NOTA Lagrange implica (se $f^{(n+1)}$ è continua)

$$f(x) = P_n(x) + O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

infatti $$\left|\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\right| \leq \text{costante}$$

DIM.

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{h(x)}{g(x)}$$

dove $h(x) = f(x) - P_n(x)$.

$g(x) = (x-x_0)^{n+1}$

Notiamo che $h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$

$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$

mentre $h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (se derivo $n+1$ volte P_n, trovo zero)

$$g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

Allora ($x > x_0$)

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x)-h(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)} = \quad \text{per} \quad x_0 < t_1 < x$$

$$\frac{h'(t_1)-h'(x_0)}{g'(t_1)-g'(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{h''(t_2)}{g''(t_2)} = \quad \text{dove } x_0 < t_2 < t_1 < x$$

$\vdots$

$$\frac{h^{(n)}(t_n)}{g^{(n)}(t_n)} \quad \text{dove} \quad x_0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < x$$

$$= \frac{h^{(n)}(t_1) - h^{(n)}(x_1)}{g^{(n)}(t_1) - g^{(n)}(x_1)} = \frac{h^{(n+1)}(t)}{g^{(n+1)}(t)} \quad . \; x_0 < t < x$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \; . \qquad \text{DUNQUE} \qquad f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(valutazione "secondo Lagrange" di R_n)

NOTA Se $n=0$ trovo
$f(x) - f(x_0) = f'(t)(x-x_0)$ (teorema della media di Lagrange)

Torniamo al problema relativo a e^x. Se uso Lagrange:

$$e^x = \overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}}^{P_n(x)} + e^t \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{per } 0 < t < x$$

(Ho usato il fatto che $f^{(n+1)}(x) = e^x$)

Allora, se $x > 0$, fissato,

$$|e^x - P_n(x)| \le \frac{e^x \, x^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0 \quad \text{se } n \to \infty \quad \left(\text{dato che } (n+1)! \text{ "VINCE" su } x^{n+1} \right)$$

DUNQUE

$$e^x = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \right) \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

POSSO ANCHE USARE QUANTO SOPRA PER VALUTAZIONI NUMERICHE. Per es. $x = 1$

$$0 \le e - P_n(x) \le \frac{3}{(n+1)!} \qquad (e^t < e^1 < 3)$$

Se voglio $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \iff 3000 < (n+1)!$ $\boxed{n = 6}$

$\underset{n=0}{1}, \ \underset{n=1}{1}, \ \underset{n=2}{2}, \ \underset{n=3}{6}, \ \underset{n=4}{24}, \ \underset{n=5}{120}, \ \underset{n=6}{720}, \ \underset{n=7}{5040} > 3000$

DUNQUE

$$e = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}}_{2{,}718055556} + \text{errore} < \frac{3}{5040} < \frac{1}{1000}$$

Teorema Supponiamo che h abbia n derivate vicino a x_0,

$h'(x_0) = 0$ (x_0, stazionario) , $h^{(j)}(x_0) = 0$ se $j = 1 \dots n-1$

$h^{(n)}(x_0) \neq 0$ (la derivata I è nulla e $h^{(n)}$ è la prima derivata non nulla)

Allora :

$$\text{Se } n \text{ è PARI} \quad \begin{cases} h^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di minimo relativo (STRETTO)} \\ h^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di max relativo (STRETTO)} \end{cases}$$

Se n è DISPARI x_0 <u>NON</u> è di estremo relativo ; volendo di più precisare , dicendo che

$h^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow h$ è crescente vicino a x_0

$h^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow h$ è decrescente vicino a x_0

<u>Dim.</u> Uso Taylor:

$$h(x) = h(x_0) + \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \iff$$

$$h(x) - h(x_0) = (x-x_0)^n \left[\frac{h^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right]$$

Per il teorema di permanenza del segno ottengo che, se x è vicino a x_0

$$\text{segno di } \frac{h(x)-h(x_0)}{(x-x_0)^n} = \text{segno di } h^{(n)}(x_0)$$

SE n PARI $(x-x_0)^n > 0$ per $x \neq x_0$ e dunque, $x \sim x_0$, $x \neq x_0$

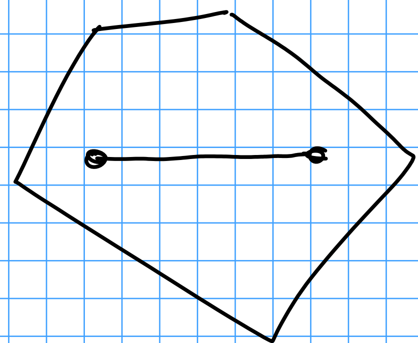
$$h(x)-h(x_0) \begin{cases} > 0 & \text{nel caso } h^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ di MIN. REL} \\ < 0 & \text{nel caso } h^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ di MAX. REL.} \end{cases}$$

SE n DISPARI IL DENOMINATORE CAMBIA SEGNO $\Rightarrow$ ...

LEGAME TRA DERIVATA II° E "CONCAVITÀ / CONVESSITÀ"

<u>DEF. DI FUNZIONE CONVESSITÀ</u>

(a) UN INSIEME A di $\mathbb{R}^N$ È CONVESSO



se

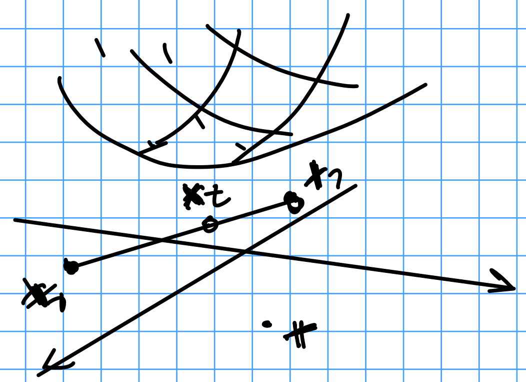
$P \in A$, $Q \in A \Rightarrow$ il segmento $[P,Q] \subset A$

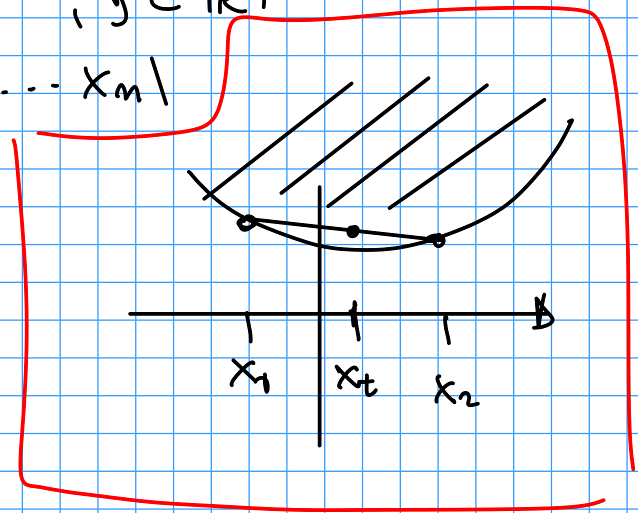
(b) Se $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subset \mathbb{R}$ convesso, dico che f è <u>convessa</u> se l'insieme (di $\mathbb{R}^{N+1}$)

$$\{(\mathbf{x}, y) : f(\mathbf{x}) \geq y\}$$

$(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R})$

$\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$





Si vede (abbastanza facilmente) che f convessa $\Leftrightarrow$

$$f(t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2) \leq t f(\mathbf{x}_1) + (1-t) f(\mathbf{x}_2)$$

$$\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A, \quad \forall\, t \in [0,1]$$

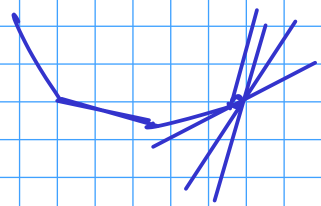
(la "combinazione convessa" $x_t = t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2$, al variare di $t \in [0,1]$ descrive il segmento tra $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$)

QUESTA DEF. ("GEOMETRICA") NON RICHIEDE DERIVATE

SI POTREBBE DIM. CHE

- f CONVESSA su $[a, b] \Rightarrow \begin{cases} f \text{ continua su }]a, b[\\ \exists\ f'_+(x),\ f'_-(x) \text{ in ogni } x \end{cases}$

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



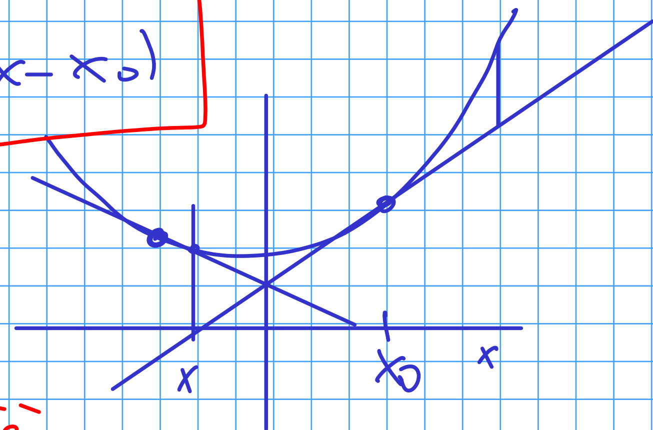
- Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile si può anche vedere che

(I intervallo)

f convessa su I (nel senso detto sopra) $\Longleftrightarrow$

$$★ \quad \boxed{\forall x_0, x \in I \qquad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

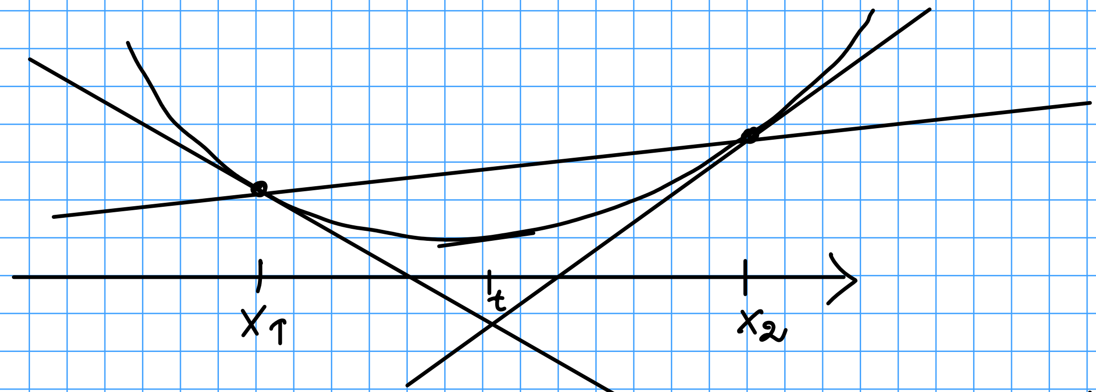
(f è, in ogni x, $\geq$ retta tangente in x_0)



se f è derivabile
POSSO USARE ★ come definizione di convessità

Teorema f derivabile su I. f è convessa $\Longleftrightarrow$ f' è crescente.

Dim. $\Rightarrow$ Supponiamo f convessa. Siano $x_1 < x_2$ in I



SO CHE $\quad f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (1)$

E ANCHE $\quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad (2)$

$$(1) \Leftrightarrow \quad f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$(2) \Leftrightarrow \quad f'(x_2) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(attenzione al segno di $x_1 - x_2$)

$$\Longrightarrow \quad f'(x_1) \leq f'(x_2) \qquad \underline{f' \text{ crescente}}$$

VICEVERSA Supponiamo f' crescente. Siano x_0 e $x > x_0$ punti di I. Per Lagrange trovo $t \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(t) \geq f'(x_0) \quad \Longrightarrow \quad (x-x_0>0)$$

$$f(x)-f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \iff f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$
$$(x>x_0)$$

Se invece $x<x_0$, faccio lo stesso discorso: $\exists\, t \in]x, x_0[$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(t) \leq f'(x_0) \quad (\text{moltiplico per } x-x_0<0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \iff f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ è convessa}$$

<u>CONSEGUENZA</u> Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte, allora

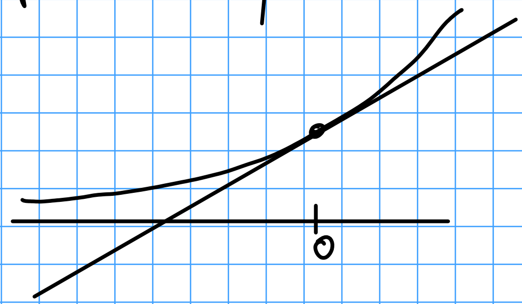
$$f \text{ è convessa} \iff f''(x) \geq 0 \text{ in } I$$

<u>ESEMPIO</u>

$$f(x)=e^x. \quad f'(x)=e^x, \quad f''(x)=e^x>0$$

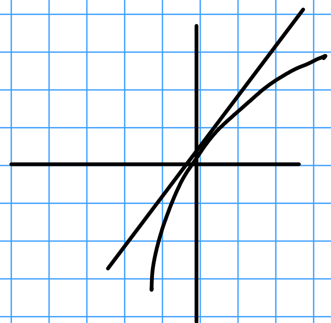
$$\Rightarrow \quad e^x \text{ è convessa}$$

NE SEGUE, PER ES., $e^x \geq 1+x$



ES. $f(x) = \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

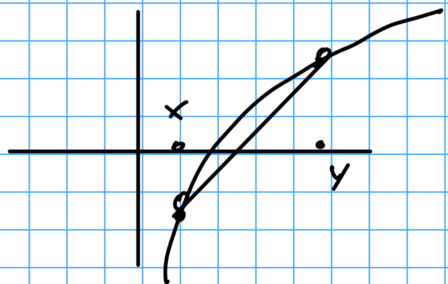
f è CONCAVA



$\ln(1+x) \leq x$

In particolare $\ln(tx + (1-t)y) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y)$

$\forall x, y > 0 \quad \forall t \in [0,1]$



Prendiamo p e q tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(esponenti "coniugati"). Allora $\forall x, y > 0$ $\left(t = \frac{1}{p} \quad 1-t = \frac{1}{q}\right)$

$$\ln\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONCAVITÀ DI } \ln(\cdot)}}{\geq} \frac{1}{p}\ln(x)+\frac{1}{q}\ln(y) = \ln\left(x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}\right)$$

DUNQUE VALE LA DIS.

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q} \geq x^{\frac{1}{p}}\, y^{\frac{1}{q}} \iff$$

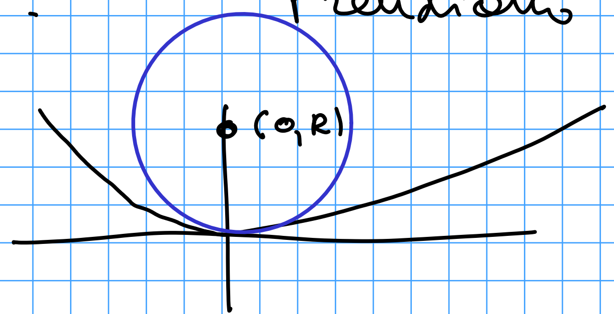
(metto x^p al posto di x
y^q al posto di y)

$$\boxed{xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \qquad \forall\, x,y>0}$$

per es. $xy \leq \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$ (si può fare direttamente
usando il quadrato di $x-y$)

Sul significato di f''. Prendiamo una f tale che

$f(0) = f'(0) = 0$



Prendiamo $R \in \mathbb{R}$ e consideriamo il punto $P=(0,R)$ e C_R

circonferenza di centro P e raggio R

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2 .$$ Chiaramente $(0,0) \in$ circonf.

Vorrei imporre che la circonferenza si trovi **SOPRA** il grafico di f, nelle x vicine a x_0. Questo si traduce in

$$(y=)\ \boxed{R - \sqrt{R^2-x^2} > f(x)} \qquad \text{per } x \text{ vicino a } x_0,\ x \neq x_0$$

supponiamo che $\exists\, f''(x)$. Se sviluppiamo f e g $(= R - \sqrt{R^2-x^2})$

in $x=0$, al II° ordine abbiamo

$$\underbrace{g(0)}_{0} + \underbrace{g'(0)}_{0}x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) > \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{f'(0)}_{0}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

per $x \sim x_0$

$$g(x) = R - \sqrt{R^2-x^2}, \qquad (g(0)=0)$$

$$g'(x) = -\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} \qquad (g'(0)=0)$$

$$g''(x) = \frac{\sqrt{R^2-x^2} + x\,\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}}{(R^2-x^2)} = \frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}; \quad g''(0) = \frac{1}{R}$$

QUINDI VOGLIO $\frac{1}{R}\frac{x^2}{2}+o(x^2) > f''(0)\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x \sim x_0$, $x \neq x_0$

DIVIDO PER $\frac{x^2}{2}$ $\quad \frac{1}{R} > f''(0) + o(1)$ per $x \neq x_0$, $x \sim x_0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{R} > f''(0)$$

IN DEFINITIVA il cerchio sta sopra (vicino a x_0)

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{R} > f''(0)$$

Dunque $f''(0) = \inf \{ \frac{1}{R}$ tale che il cerchio sta sopra $\}$ OPPURE

se $\bar{R} = \frac{1}{f''(0)}$, allora $\bar{R} = \sup \{ R :$ il cerchio sta sopra $\}$

$\bar{R}$ = raggio del cerchio osculatore. (CASO $f'(0)=0$)

se $f''(0)=0 \implies \bar{R} = +\infty$

Se $\bar{R} < 0$, il cerchio "sta sotto"