Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ventesima lezione, 16 dicembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Data una funzione f, definita vicino a un pto x_0, derivabile "quanto basta", cerco un polinomio P, di grado $\leq n$ tale che:

$$f(x) = P(x) + o(|x-x_0|^n)$$

$$\Updownarrow$$

$$(*) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{|x - x_0|^n} = 0$$

Abbiamo visto l'ultima volta (conseguenza di de l'Hôpital)

Lemma se h è definita vicino a x_0, h è derivabile n volte, allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{|x-x_0|^n} = 0 \iff h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$$

Conseguenze 1 Supponga f derivabile n volte. Vale $(*) \iff$

$$(**) \quad P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Proposizione Se impongo che grado $(P) \leq n \Rightarrow$ esiste uno e uno solo polinomio che verifica $(**)$.

Tale polinomio è dato dalla formula

$$P(x) = P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

P_n si chiama "polinomio di Taylor" di ordine n, in x_0.

DIM. Prendiamo un generico $P(x)$, polinomio di grado $\leq n$; è facile vedere che si può scrivere

$$\boxed{P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n}$$

(IDEA: se $P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n \Rightarrow$

$$P(x) = b_0 + b_1(x-x_0+x_0) + \dots + b_n(x-x_0+x_0)^n =$$

... SVILUPPO LE POTENZE ... $\underbrace{b_0 + b_1 x_0}_{a_0} + b_1(x-x_0) + \dots$

ARRIVO A UNA ESPRESSIONE COME QUELLA SOPRA)

(1) $P(x_0) = a_0$

(2) $p'(x) = a_1 + a_2 \cdot 2(x - x_0) + a_3 \cdot 3(x-x_0)^2 + \dots + a_n n (x-x_0)^{n-1}$

$\Rightarrow p'(x_0) = a_1$

(3) $p''(x) = a_2 \cdot 2 + 3 \cdot 2\, a_3 (x-x_0) + \dots + a_n n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$

$p''(x_0) = 2a_2 \leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2} p''(x_0)$

⋮

ITERANDO VEDO CHE

$$\boxed{a_j = \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}}$$

QUESTA FORMULA È VERA PER UN QUALUNQUE POLINOMIO

A QUESTO PUNTO LA CONDIZIONE

$p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ DIVENTA

$$a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \qquad \left(f^{(0)}(x) = f(x) \ !! \right)$$

DUNQUE P deve essere $\boxed{P_n(x) = \sum \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j}$

In definitivo ho dimostrato

Teorema Dato f definita vicino a x_0, derivabile n volte. (1) Si ha:

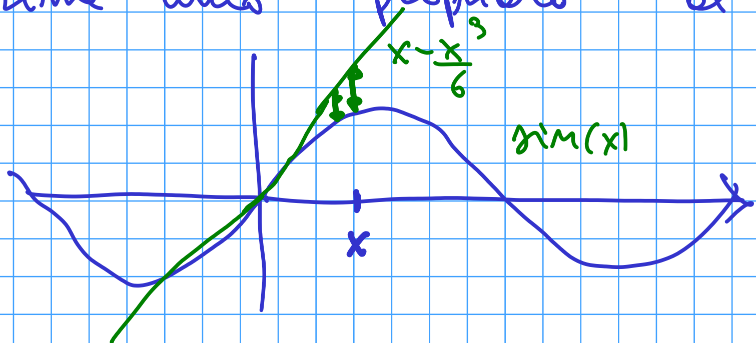
$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

dove $P_n(x)$ è quello scritto sopra

(2) Inoltre se $P(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$ per cui $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$

deve essere $P(x) = P_n(x)$

Notiamo che l'informazione $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ esprime una proprietà "al limite", quando x è vicino a x_0



Vari esempi (importanti) Tipicamente $x_0 = 0$
(polinomio di Mac Laurin). Generalizzazione dei limiti notevoli: per esempio il limite notevole
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ dice che $P_1(x) = 1 + x$ (rel. a e^x in $x_0 = 0$)

(1) $f(x) = e^x$; fisso $n \geq 0$ intero.

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$
$$\vdots$$
$$f^{(j)}(x) = e^x \qquad f^{(j)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^j}{j!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

QUINDI

noto dal limite notevole

$$e^x = \boxed{1 + x} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

(1') Prendiamo $f(x) = e^{2x}$. Rifacendo gli stessi calcoli

$$
\left.\begin{aligned}
f(x) &= e^{2x} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= 2e^{2x} & f'(0) &= 2 \\
f''(x) &= 4e^{2x} & f''(0) &= 4 \\
&\vdots \\
f^{(j)}(x) &= 2^j e^{2x} & f^{(j)}(0) &= 2^j
\end{aligned}\right\} \Rightarrow P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{j!} x^j
$$

PERÒ AVREI ANCHE POTUTO DIRE

$$
e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + o(x^n) \Rightarrow e^{2x} = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^j x^j}{j!} + o\left((2x)^n\right)
$$

MA È CHIARO CHE $o\left((2x)^n\right) = o(x^n)$

$\left(\frac{h(x)}{(2x)^n} \to 0 \iff \frac{h(x)}{x^n} \to 0 \right)$. DUNQUE

$$
e^{2x} = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{j!} x^j + o(x^n) \Rightarrow \text{(per l'unicità di } P_n\text{)}
$$

il pol. di Taylor di e^{2x} in $x_0 = 0$ deve essere

OSS: Il fatto che

$\rightarrow$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ $\iff$ $n+1$ limiti: per $x \to 0$

$$e^x \to 1 \; , \quad \frac{e^x - 1}{x} \to 1 \; , \quad \boxed{\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \to \frac{1}{2}} \; (*)$$

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3} \to \frac{1}{6} \; \ldots \; , \quad \frac{e^x - \left(1 + \cdots \frac{x^{n-1}}{n-1}\right)}{x^n} \to \frac{1}{n!}$$

$$(*) \quad \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \ln(1-x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} = -(1-x)^{-1} \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = -(-1)(1-x)^{-2}(-1) = -(1-x)^{-2} \; ; \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = -2\,(1-x)^{-3} \; , \quad f'''(0) = -2$$

$$\vdots$$

$$f^{(j)}(x) = -(j-1)!\,(1-x)^{-j} \qquad f^{(j)}(0) = -(j-1)!$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{-(j-1)!}{j!} x^j = -\sum_{j=1}^{m} \frac{x^j}{j} \quad + o(x^m)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Se metto $-x$ al posto di x trovo

$$-\ln(1+x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j + o(x^n)\end{aligned}}$$

(3) $(1+x)^\alpha = f(x)$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$$f^{(j)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}_{j \text{ fattori}}(1+x)^{\alpha-j} \Rightarrow f^{(j)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)$$

DUNQUE

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j$$

Dove $\binom{\alpha}{j} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$

NOTA Se $\alpha = k \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} = \frac{k!}{(k-j)!\,j!} = \binom{k}{j} \quad \text{(vecchio formula)}$$

se $j \geqslant k+1$, al numeratore trovo $k-k$ tra i fattori

$\Rightarrow \binom{k}{j} = 0$ per $j \geqslant k+1$

se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\alpha}{j} \neq 0 \quad \forall j$

DUNQUE

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j + o(x^n)$$

(se $\alpha \in \mathbb{N}$ i termini con $j \geqslant \alpha+1$ sono nulli e,

e' $o(x^n) = 0$ per $n \geqslant \alpha$

Per esempio $\alpha = \frac{1}{2}$; vediamo i primi 4 coeff.

$$\binom{1/2}{0} = 1$$ (PER DEF. — avrei dovuto dirlo prima)

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2\,(1/2-1)}{2!} = \boxed{-\frac{1}{8}}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

<u>QUINDI</u>

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)}$$

che mi dice:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2} = -\frac{1}{8}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-x/2+x^2/8}{x^3} = \frac{1}{16}$$

Altro esempio: $\alpha \neq 0$

$$(a+x)^{\alpha} = a^{\alpha}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\alpha} = a^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}\binom{\alpha}{j}\frac{x^{j}}{a^{j}} + o\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\right)$$

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{\alpha}{j}x^{j}a^{\alpha-j}}_{\text{deve essere } P_n(x)} + \underbrace{o\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\right)}_{= o(x^n)}$$

<u>OSS.</u> (senza spiegazione rigorosa)

- $$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j+1}}{j}x^{j} + o(x^{n})$$

se derivo il $\ln(1+x)$ trovo $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

Dalla (3) con $\alpha = -1$

$$(1+x)^{-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{-1}{j}x^{j} + o(x^{n})$$

MA $\binom{-1}{1} = -1$

$$\binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1$$

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3} = -1$$

$$\binom{-1}{j} = (-1)^j \quad \Rightarrow \quad (1+x)^{-1} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j x^j + o(x^m)$$

DUNQUE

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\rightarrow (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

OGNI TERMINE DEL POLINOMIO DI $(1+x)^{-1}$ È LA DERIVATA DEL "CORRISPONDENTE" TERMINE DEL POLINOMIO REL. A $\ln(1+x)$

IN QUALCHE SENSO

$$\underbrace{\left(\sum_{j}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j \right)' = \sum_{j}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{j+1}}{j} \right)'}$$

OSS Lo sviluppo

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^m x^m + o(x^m)$$

si può vedere direttamente dalla formula

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\dots+x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$o(x^n)$

Per l'unicità dello sviluppo di Taylor

$1+x+\dots+x^n$ è il pol di Taylor n-esimo di $\frac{1}{1-x}$

$$\Updownarrow$$

$1-x+x^2-x^3\dots+(-1)^n x^n =$ pol di Taylor nesimo di $\frac{1}{1+x}$

(4) $f(x) = \sin(x)$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x) = \cos(x)$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$ $\qquad f'''(0) = -1$

$f^{(IV)}(x) = \sin(x)$ $\qquad$ SI RICOMINCIA

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ è PARI} \\ 1 & \text{se } j = 1 + 4k \text{, oppure } j = 2h+1,\ h \text{ PARI} \\ -1 & \text{se } j = 3+4k \text{, oppure } j = 2h+1,\ h \text{ dispari} \end{cases}$$

$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$

ALLORA

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{P_{2n+1}(x) = P_{2n+2}(x)} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

ATTENZIONE

per es. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$

LA POTENZA 6 HA COEFFICIENTE NULLO !!

(se scrivo $o(x^5)$ NON SBAGLIO, MA SCRIVO MENO DI QUANTO SO

CON CALCOLI ANALOGHI

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

OSS Se $f(x)$ è dispari, cioè $\forall x$ $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ lo sviluppo in $x_0 = 0$ contiene SOLO POTENZE DISPARI

Se $f(x)$ è pari, cioè $\forall x$ $f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ SOLO POTENZE PARI

INFATTI si ha f dispari $\Rightarrow$ f' pari (f pari $\Rightarrow$ f' dispari)

perché $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} =$

$- \lim_{h \to 0} \frac{f(-(-x_0+h)) - f(-(-x_0))}{h} = - \lim_{h \to 0} \frac{-f(-x_0+h) + f(-x_0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x_0+h) - f(-x_0)}{h} = f'(-x_0)$ $\boxed{f' \text{ PARI}}$

INOLTRE SE $h(x)$ è dispari $\Rightarrow$ $h(0) = 0$

Esempio $f(x) = \tan(x)$ $(x_0 = 0)$

cerchiamo lo sviluppo fino al termine di grado 5 $(P_5(x))$

POSSO DIRE SUBITO CHE NON CI SONO POTENZE PARI DATO CHE $f(x)$ È DISPARI

Potrei calcolare $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$

e mettere $x = 0$

OPPURE mi ricordo che $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

e cerco di sfruttare gli sviluppi di $\sin(x)$ e $\cos(x)$

VOGLIO SCRIVERE $\tan(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^6)$

$$a_1 \leftarrow f'(0) \qquad a_3 \leftarrow \frac{f'''(0)}{6} \qquad a_5 \leftarrow \frac{f^{V}(0)}{120}$$

TROVO a_1:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x + o(x)}{1 + o(1)} =$$

$$\frac{x}{1}\frac{(1+o(1))}{(1+o(1))} = x\left(1 + o(1)\right) = x + o(x) \qquad \boxed{a_1 = 1}$$

TROVO a_3

$$\tan(x) - x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - x =$$

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} - x = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \cancel{- x} + \frac{x^3}{2} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^4)}{1 + o(1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{1 + o(1)} = \frac{x^3}{3}\,\frac{1 + o(x)}{1 + o(1)} =$$

$$\frac{x^3}{3}\left(1 + o(1)\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \implies \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

TROVO a_5

$$\tan(x) - x - \frac{x^3}{3} =$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - x - \frac{x^3}{3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} - x - \frac{x^3}{3} =$$

$$\frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^5}{24} + o(x^5) - \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right)x^5 + o(x^5)}{1 + o(1)} = \ldots \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \qquad \boxed{a_5 = \frac{2}{15}}$$

$$\left(\frac{1 - 5 + 20}{120} = \frac{16}{120} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}\right)$$

IN QUESTO MODO HO TROVATO CHE

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = \frac{1}{3} \cdot 3! = 2$$

$$f^{IV}(0) = 0, \quad f^{V}(0) = \frac{2}{15} \cdot 5! = \frac{2 \cdot 120}{15} = 16$$

(senza calcolare $f^{(j)}(x)$ in $x \neq 0$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-2x}\, e^x - 1}{1-\cos(x)}$$

E' chiaramente una forma tipo $\frac{0}{0}$

(1) proviamo de l'Hôpital : derivo sopra e sotto

$$\frac{\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} e^x + \sqrt{1-2x}\; e^x}{\sin(x)} =$$

$$e^x \frac{\frac{-2 + (1-2x)^2}{2\sqrt{1-2x}}}{\sin(x)} = \frac{e^x}{\cancel{2}\sqrt{1-2x}} \frac{-\cancel{4}^{2}x}{\sin(x)} \to -2$$

- (se volessi fare ancora l'Hôpital)

$$\lim_{x\to 0} \cdots = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{-2x}{\sin x} =$$

$$\frac{-2}{1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \underset{\text{l'Hôpital}}{\uparrow} -2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = -2$$

(2) Usiamo Taylor:

$$\frac{\sqrt{1-2x}\ e^{x}-1}{1-\cos(x)}$$

DENOMINATORE $1-\cos(x) = 1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$

NUMERATORE (visto che al denominatore c'è $\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, sviluppo il numeratore al secondo ordine)

- $\sqrt{1-2x} = (1-2x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}(-2x)-\frac{1}{8}(-2x)^2+o\left((-2x)^2\right)$

(HO USATO $(1+y)^{1/2} = 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2)$ con $y=-2x$)

$= 1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

- $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. FACCIO IL PRODOTTO

$\sqrt{1-2x}\ e^x = \left(1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) =$

$1\cancel{+x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^2)\cancel{-x}-x^2+o(x^2)-\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^2)+o(x^2) =$

$1-x^2+o(x^2)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-2x}\ e^x-1}{1-\cos(x)} = \frac{1-x^2+o(x^2)-1}{1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \longrightarrow -2$

RIASSUNTO

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + o(x^{2n+2})$$

$P_{2n} = P_{2n+1}$

$P_{2n+1} = P_{2n+2}$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} + o(x^{2n+1})$$