Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Diciannovesima
lezione, 2 dicembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

SEGNO DI f' ↔ MONOTONIA DI f

<u>Teorema</u> Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, sono fatti <u>equivalenti</u>

(a) f crescente su $[a,b]$ (decrescente)

(b) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ ($f'(x) \leq 0$)

<u>Dim.</u>

(a) ⇒ (b) è conseguenza della definizione di derivata. Infatti f crescente ⇔

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0 \quad \text{per ogni } x, y \in [a,b],\ x \neq y$$

Ne segue che f crescente ⇒ $\forall x_0 \in]a,b[$

$$f'(x_0) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

(b) ⇒ (a) NON SI RIESCE A INVERTIRE IL RAGIONAMENTO PRECEDENTE

Si usa il teorema di Lagrange: dati $x \neq y$ faccio il rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(t)$$

per un opportuno t compreso tra x e y

Dato che $f' \geq 0 \Rightarrow f'(t) \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0 \qquad \forall x, y \text{ con } x \neq y$$

$\Rightarrow$ f crescente #

OSS. Se considero le "disuguaglianze strette"

(a') f strettamente crescente (in $[0,5]$)

(b') $f' > 0$ (in $]0,5[$)

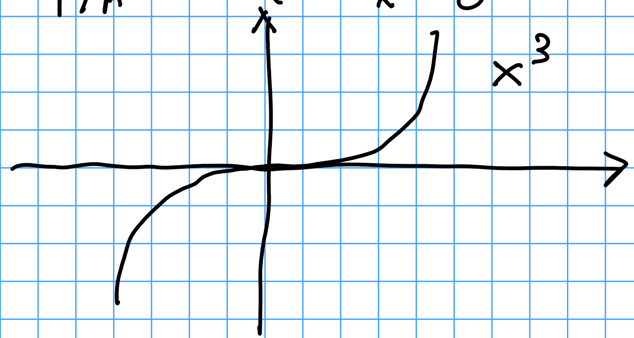
Si ha: $(b') \Rightarrow (a')$ MA $(a') \not\Rightarrow (b')$

Per dim. $(b') \Rightarrow (a')$ si ripete la dim. di $(b) \Rightarrow (a)$ tenendo conto delle disuguaglianze strette.

INVECE se si guarda $f(x) = x^3$ si vede che

$x > y \Rightarrow x^3 > y^3$ MA in $x = 0$

la derivata è nulla



CON GLI STRUMENTI MESSI A PUNTO FINO AD ORA POSSIAMO FARE STUDI DI FUNZIONE

<u>ESEMPIO</u> $f(x) = x^x$

<u>DOMINIO</u> : $\boxed{x > 0}$ $f(x) = e^{x\ln(x)}$

<u>CONTINUITÀ E LIMITI "AGLI ESTREMI"</u>

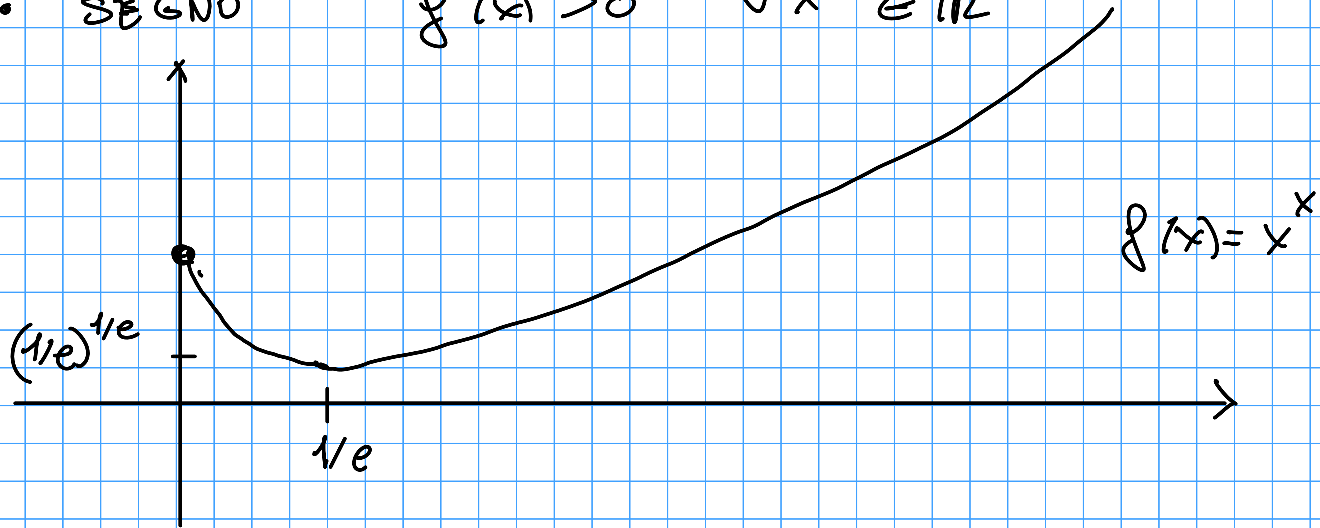
- "se $x > 0$ f è continua in quanto tutti "i suoi componenti" sono funzioni continue

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^{0^-} = 1^-$$

DUNQUE SE DEFINISCO $f(0) = 1$ f risulta:
continua anche in $x=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)} = e^{+\infty} = +\infty$$

- SEGNO $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



- <u>Derivata e monotonia</u> E' chiaro che f è derivabile in ogni x con $x>0$. Calcoliamo $f'(x)$

$$f'(x) = e^{x\ln x}\cdot(x\ln(x))' = x^x\left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) =$$

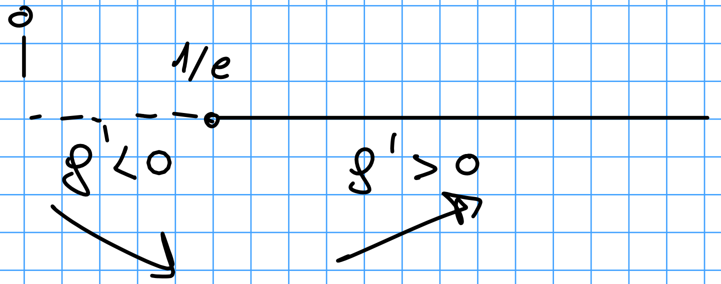
$$= x^x\left(\ln(x)+1\right)$$

Il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno di

$\ln(x)+1 \qquad (x^x > 0)$. Si ha:

$$\ln(x)+1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$$

Dunque



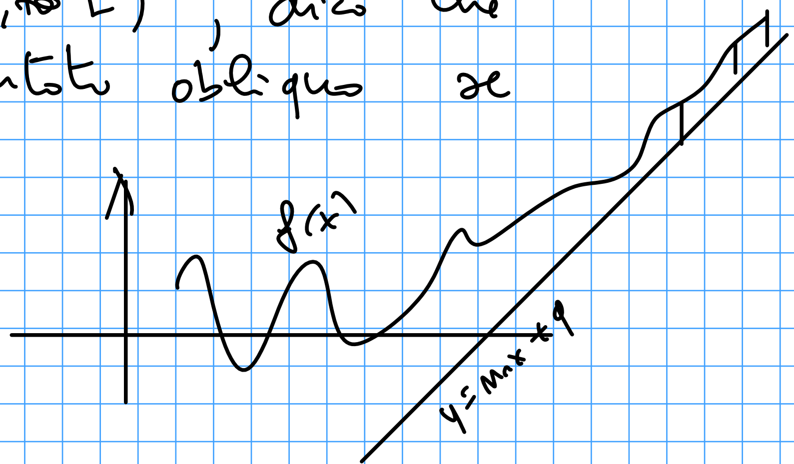
$x = \frac{1}{e}$ è pto di minimo e $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ è il minimo (assoluto) di x^x (VEDI GRAFICO)

ALTRE DOMANDE POSSIBILI

(1) Esiste un "asintoto obliquo"?

DEF. Data una funzione definita "vicino a $+\infty$" (cioè in una semiretta $[a,+\infty[$), dico che $y = mx+q$ è un asintoto obliquo se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx - q = 0$$



NOTA se $m=0$ l'asintoto si dice orizzontale (cioè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = q$)

COME TROVO GLI ASINTOTI OBLIQUI.

Se $f(x) - mx - q \to 0 \implies$ (divido per x)

$$\frac{f(x)}{x} - m \to 0 \iff \frac{f(x)}{x} \to m$$

DUNQUE, se c'è l'as. obl., $\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}$

TROVATO m si trova q (se esiste) facendo

$$\boxed{q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx}$$

Nel caso in esame <u>NON C'È ASINTOTO OBLIQUO</u>:

$$\frac{x^x}{x} = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln(x)} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

(2) f è derivabile in $x=0$ (avendo posto $f(0)=1$)

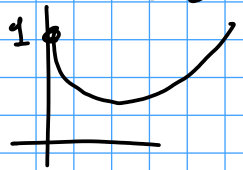
Applichiamo la def. di derivata:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)}}_{\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}} \cdot \ln(x) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

avendo posto $t = x\ln(x)$

DUNQUE f <u>NON</u> È DERIVABILE IN ZERO: HA DERIVATA (DX) $-\infty$



(TANGENTE VERTICALE IN $(0,1)$)

(3) CONCAVITÀ / CONVESSITÀ: ASPETTIAMO LE DERIVATE SECONDE

ALTRA APPICAZIONE DELLE DERIVATE: Teoremi di de l'Hôpital per i limiti di forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. CE NE SONO VARI

Il caso più semplice

Teorema $f, g :]x_0, x_0+\delta[$ $(\delta > 0)$ $x_0 \in \mathbb{R}$

derivabili in $]x_0, x_0+\delta[$. Suppongo che

(A) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ E' UNA FORMA INDETERMINATA } \frac{0}{0} \right)$

(B) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$

Esiste $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ $\quad \ell \in [-\infty, +\infty]$

ALLORA $g(x) \neq 0$ ed esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

DIM. • ESTENDIAMO f e g nel punto x_0, ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. In questo modo f e g sono continue in $[x_0, x_0+\delta[$ (e derivabili in $]x_0, x_0+\delta[$)

- $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \,]x_0, x_0+\delta[$, perché se ci fosse uno x in cui $g'(x)=0 \Rightarrow$ potrei applicare Rolle tra x_0 e x $\Rightarrow \exists\, y \in \,]x_0, x[$ in cui $g'(y) = 0$ CONTRO L'IPOTESI

- VEDIAMO CHE $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Per farlo

prendo una qualunque successione $x_n \in \,]x_0, x_0+\delta[$ tale che $x_n \to x_0$ e calcolo

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - \overset{=0}{f(x_0)}}{g(x_n) - \underset{=0}{g(x_0)}} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

dove t_n è un opportuno punto con $\underbrace{x_0 < t_n < x_n}_{*}$,

CHE ESISTE PER IL TEOREMA DI CAUCHY.

DA $*$ segue che $t_n \to x_0$ (DUE CARABINIERI)

DATO CHE $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ SEGUE $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \to \ell$

HO DIMOSTRATO CHE $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \ell$

DATO CHE $\{x_n\}$ è arbitrario HO DIMOSTRATO

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

\#

OSSERVAZIONI (a) Si può rifare tutto da sinistra o da entrambi i lati

(b) In generale non è detto che

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

CONTROESEMPIO COMPLICATO !

TEOREMI ANALOGHI VALGONO (con dim. diverse)

- $x_0 = \pm\infty$ (cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$)
- se l'ipotesi (A) è sostituita da

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0^+} |f(x)| = +\infty \\ &\lim_{x\to x_0^+} |g(x)| = +\infty \end{aligned}\right\}$$ limite tipo $\frac{\infty}{\infty}$

(COMPLICATO)

(NON LO DIMOSTRIAMO)

(c) Ci possono essere vari modi NON EQUIVALENTI di mettere un limite in forma indeterminata. tipo sopra.

PER ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \; !?$$

(VOGLIO USARE Hôpital)

<u>MODO 1</u>

$$x \ln(x) = \frac{x}{1/\ln(x)}$$

se derivo sopra e sotto trovo

$$\frac{1}{\frac{-1/x}{\ln^2(x)}} = -x \ln^2(x)$$

SIAMO PIÙ O MENO AL PUNTO DI PARTENZA!!

COSÌ NON VA

<u>MODO 2</u>

$$x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

; derivo sopra e sotto:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \to 0 \; (0^-)$$

TORNA!!

OSS. Nell'Hôpital NON SI CHIEDE NULLA IN $x = x_0$.

Se esistessero $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$, $\boxed{g'(x_0) \neq 0}$

si potrebbe dim. (in modo più facile) che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$ infatti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

DI SOLITO QUESTO NON SERVE

NON È ITERABILE: per esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$ è OK. $\to \frac{\cos(0)}{1} = 1$

MA $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$ NON VA – INVECE

CON L'Hôpital VERO IO POSSO SCRIVERE

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \underset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Hôpital

$$e^x\left(x-\ln(1+e^x+x^2)\right) =$$

$$e^x\left(\ln\frac{e^x}{1+e^x+x^2}\right) =$$

$$e^x\left(\ln\left(1+\frac{-1-x^2}{1+e^x+x^2}\right)\right) \simeq$$

$$\frac{(-1-x^2)e^x}{1+e^x+x} \to -\infty$$

PROBLEMA: (suggerito dallo studio di $f(x)=x^x$)

Data una $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$

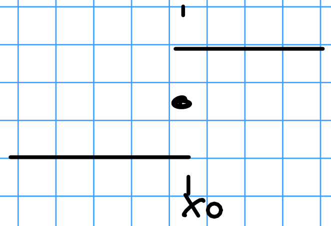
tali che $\exists\, f'(x)$ $\forall x\neq x_0$, ed esiste anche

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)=\ell \quad (\in\mathbb{R})$$

DOMANDA: posso dire $f'(x_0)$ esiste e fa ℓ ??

SE NON DICO ALTRO LA RISPOSTA È $\boxed{\text{NO}}$

(MANCA LA CONTINUITÀ IN x_0 !!)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f è definita ovunque, $f'(x)$ esiste se $x \neq 0$,

$f'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$ e quindi $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$

MA f <u>NON</u> È DERIVABILE IN ZERO

SE AGGIUNGO L'IPOTESI: f continua su $[a,b]$

$\Rightarrow$ il risultato è vero. Infatti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = l$$

LA CONTINUITÀ DI f in x_0 GARANTISCE CHE

L'ESPRESSIONE $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è del tipo $\frac{0}{0}$, dato che

$f(x) - f(x_0) \to 0$

Esempio $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ per $x \neq 0$

$f(0) = 1$

$\Rightarrow$ f è continua (limite notevole $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$)

DOMANDA f è DERIVABILE IN $x=0$??

MODO 1 (diretto) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2}$. Per calcolarlo uso

l'Hôpital e considero

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{2x^2}}_{\to -\frac{1}{4}} \cdot x = 0$

|| oppure con Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$

MODO 2 Calcolo $f'(x)$ per $x \neq 0$ e poi faccio

tendere $x \to 0$. Viene:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$$; devo fare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \overset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos(x)} - x\sin(x) + \cancel{\cos(x)}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$$

EFFETTIVAMENTE

$$\operatorname{sync}(x) := \frac{\sin(x)}{x}$$ è derivabile in zero e la derivata è zero

<u>NOTA</u> $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è <u>PARI</u>, cioè

$$f(-x) = f(x)$$

<u>INOLTRE</u> se f è PARI (DISPARI) ed è derivabile

$\Rightarrow$ f' è DISPARI (PARI). INFATTI

FISSO x_0, faccio il rapporto incrementale in $-x_0$

$$\lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} = \lim_{x\to -x_0} \frac{f(-x) - f(x_0)}{x + x_0} =$$

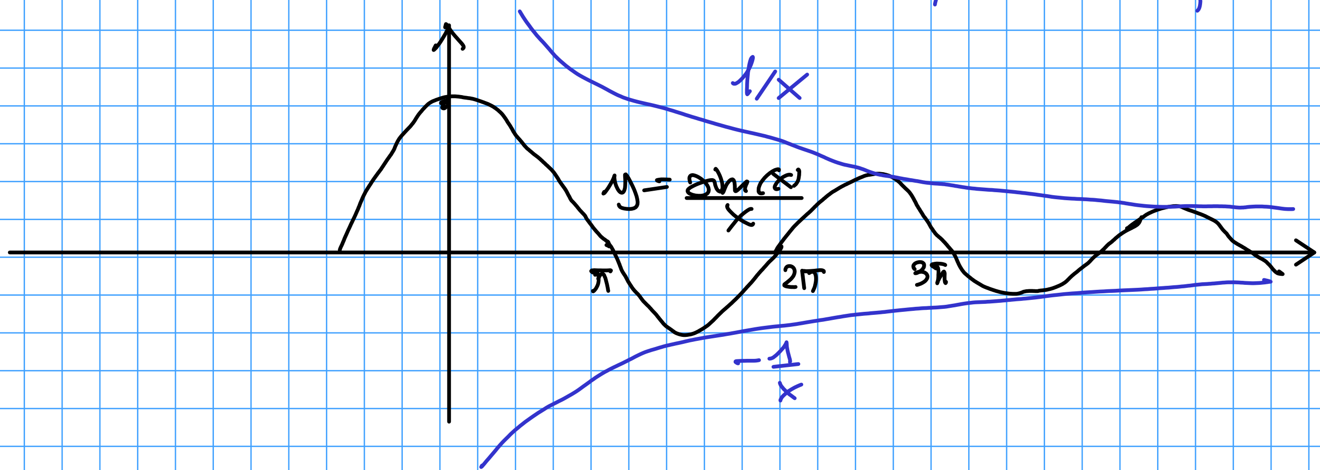
(cambio di variabile $y = -x \Rightarrow y \to x_0$)

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{-y + x_0} = - \lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

CIOÈ $\quad f'(-x_0) = -f'(x_0)$

ANALOGAMENTE SE f DISPARI $\Rightarrow f'(-x_0) = f'(x_0)$

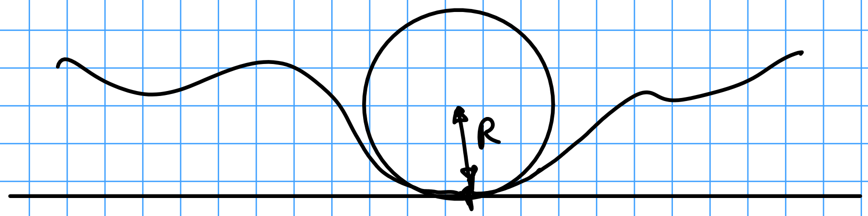
PENSARE ALLE FUNZIONI x^n / $\sin(x)$, $\cos(x)$



DERIVATE SUCCESSIVE ALLA PRIMA.

<u>IDEA INTUITIVA</u> $\quad f''$ è collegata con il raggio del "cerchio osculatore"

$f(x)$ ha derivata I e II^a. $f(0) = f'(0) = 0$



$$R = \frac{1}{f''(0)}$$

(più alta f'' $\rightarrow$ più f "CURVA")

(R è il sup dei raggi tali che il corrispondente cerchio è sopra il grafico di f nei punti vicini a x_0)

DA f''' in poi il significato geometrico è poco interessante

PRIMO USO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE:

CRITERIO PERCHÉ UN PTO STAZIONARIO SIA MAX/MIN

TEOREMINO Se f derivabile 2 volte vicino a x_0

$f'(x_0) = 0$ (pto stazionario) e $f''(x_0) \neq 0$,

ALLORA

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ x_0 pto di minimo relativo

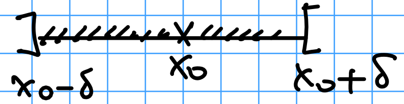
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ x_0 pto di massimo relativo.

<u>DIM.</u> Mettiamo che $f''(x_0) > 0$. Allora

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

PER LA PERMANENZA DEL SEGNO $\exists\, \delta > 0$

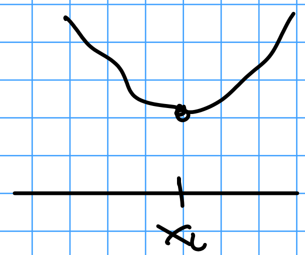
tale che $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ se $0 < |x - x_0| < \delta$



$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta \\ f'(x) < 0 & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f cresce su $[x_0, x_0 + \delta]$

f decresce su $[x_0 - \delta, x_0]$



$\Rightarrow$ x_0 pto di minimo relativo

Questo teorema di solito non serve dato che normalmente si riesce a studiare il segno di f'

SARÀ PIÙ UTILE L'ANALOGO IN PIÙ VARIABILI

L'UTILIZZO PRINCIPALE DELLE $f^{(i)}$ per $i \geq 1$ E' LA COSTRUZIONE DEL POLINOMIO DI TAYLOR

IL PROBLEMA SI PUÒ IMPOSTARE COSÌ:

$n \in \mathbb{N}$. Dato $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (derivabile quanto serve) e $x_0 \in [a,b]$, vorrei trovare un polinomio P di grado non superiore a n tale che

$$f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

CIOE'

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

SE $n = 1$ $\quad P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

(la retta tangente) COME GIÀ VISTO

TRE PUNTI: (1) Esiste un tale $P(x)$?
(2) Ce n'è solo uno?
(3) Come è fatto?

(Sì se f HA n derivate)

Lemma Se $h(x)$ derivabile n volte.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \iff 0 = h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0)$$

$h(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \iff$ tutte le derivate di h in x_0 sono nulle.

Dim. (uso Hôpital) Supponiamo che

$$h(x_0) = h'(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$$

. Allora

$\dfrac{h(x)}{(x-x_0)^n}$ è una forma $\dfrac{0}{0}$ (dato che $h(x_0)=0$)

USO HÔPITAL E PASSO A

$\dfrac{h'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$ è una forma $\dfrac{0}{0}$ (dato che $h'(x_0)=0$)

$\vdots$

VADO AVANTI n VOLTE

$$\frac{h^{(m)}(x)}{m!} \quad \text{TENDE A} \quad \frac{h^{(m)}(x_0)}{m!} = 0$$

(la derivata m-esima di $(x-x_0)^m$ è $m!$)

HO DIMOSTRATO " $\Leftarrow$ ".

Viceverso, supponiamo che una delle derivate sia $\neq 0$

chiamo j l'indice della prima derivata $\neq 0$. DUNQUE

$$h(x_0) = h'(x_0) = \ldots = h^{(j-1)}(x_0) = 0, \quad \text{MA} \quad h^{(j)}(x_0) \neq 0$$

$(0 \leq j \leq m)$. RAGIONANDO COME PRIMA

FACCIO HÔPITAL j VOLTE :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^j} = \lim_{x\to x_0} \frac{h'(x)}{j(x-x_0)^{j-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{h^{(j)}(x)}{j!}$$

$$= \frac{h^{(j)}(x_0)}{j!} \neq 0$$

MA ALLORA

$$\frac{h^{j}(x_0)}{j!} \leftarrow \frac{h(x)}{(x-x_0)^j} = \underbrace{\frac{h(x)}{(x-x_0)^m}}_{\downarrow \, 0} (x-x_0)^{m-j} = 0.$$

ASSURDO

CONSEGUENZA

$$f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right),$$

$$\left(P \text{ polinomio e } f \text{ ha } n \text{ derivate} \right) \Updownarrow$$

$$P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) \qquad j = 0, 1, \dots, n$$

IL POLINOMIO P deve avere le stesse derivate (da 0 a n) di f NEL PUNTO x_0