Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Diciottesima lezione, 26 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Visto la def. di derivata: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

SOLITI TEOREMI SULLE PROPRIETÀ:

<u>TEOREMA</u>: Se f, g sono derivabili in x_0 $\Rightarrow$

(a) $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(b) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

(c) Se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

<u>DIM.</u> (a) è evidente. (b) Faccio il rapporto incrementale di $f \cdot g$:

$$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x_0)}{x - x_0} +$$

$$\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\xrightarrow[(x \to x_0)]{} f(x_0)\, g'(x_0) + g(x_0)\, f'(x_0)$$

(NOTA $f(x) \to f(x_0)$ perché f è continua $\Leftarrow$ f derivabile)

(c) Faccio il rapporto incrementale di $\frac{1}{f}$: ($f(x_0) \neq 0$!!!)

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)\, f(x_0)} \, \frac{1}{x - x_0} = \frac{(-1)}{f(x) f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

<u>CONSEGUENZA</u>:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

VEDENDO $\frac{f}{g}$ COME $f \cdot \frac{1}{g}$

<u>Teorema</u> (sulla composizione) Se $f : I \to J$, $x_0 \in I$, f derivabile in x_0, $y_0 := f(x_0) \in J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ derivabile in y_0. Allora la composizione $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e si ha $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0)$

IN TERMINI "FUNZIONALI" $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f'$

DIM. (semplificata) DEVO FARE IL RAPPORTO INCREMENTALE DI $g \circ f$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

SERVE $f(x) \neq f(x_0)$

$$\left.\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}\right|_{y = f(x)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Passando al limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cambio di variabile $y = f(x)$; dato che $f(x) \to f(x_0) = y_0$, il limite diventa per $y \to y_0$

$$= g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

(La dim. si può "aggiustare" per comprendere il caso generale)

ALCUNE CONSIDERAZIONI SUL SIGNIFICATO DI DERIVATA:

f è derivabile in x_0 $\forall x$ esiste $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(\in \mathbb{R})$

QUESTO SI PUÒ DIRE COSÌ: c'è un numero m

tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = o(1)$$

($o(1)$ è semplicemente un infinitesimo)

se moltiplico per $x - x_0$ trovo

$$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + m(x - x_0)}_{\text{retta}} + o(x - x_0)$$

POSSIAMO ALLORA DIRE CHE

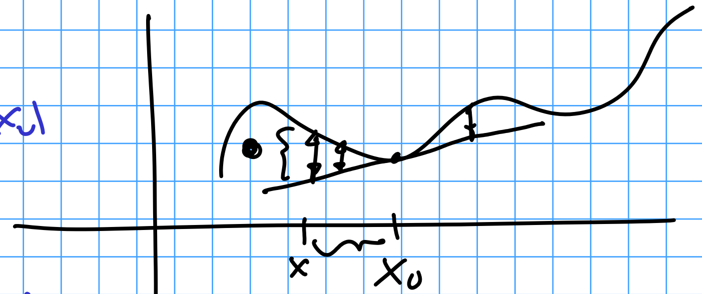
f DERIVABILE IN x_0
e
$f'(x_0) = m$

$\Rightarrow$ $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ + infinitesimi di ordine $> (x - x_0)$

$\Leftarrow$

POTREI DIRE CHE UNA RETTA $y = y_0 + m(x-x_0)$ è tangente "a f" nel punto (x_0, y_0) $\quad (y_0 = f(x_0))$

se $f(x) = y_0 + m(x-x_0) + o(x-x_0)$



la distanza (•) tra la funzione e la retta in x, è "più piccola" della dist. di x da x_0.

È chiaro allora che $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m = o(1) \Rightarrow$

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

La derivata $f'(x_0)$ è il coeff. angolare dell'unica retta

$$y = y_0 + m(x-x_0)$$

che differisce da f per $o(x-x_0)$

Esaminiamo secondo questo punto di vista la formula

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0)$$

Se f e g fossero due rette:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= y_0 + m(x-x_0) \\ g(y) &= z_0 + m_1(y-y_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(f(x)) = z_0 + m_1(m(x-x_0)) = z_0 + m\,m_1(x-x_0)$$

Il coeff. angolare della composizione è il prodotto dei coeff. ang.

- Se f, g sono due funzioni derivabili in x_0 la formula continua a valere con degli $o(\cdot)$ che al limite non contano ~

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= y_0 + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \\ g(y) &= z_0 + g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0) \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\cdots\cdots\right) \quad g(f(x)) = z_0 + f'(x_0)\,g'(y_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

<u>Teorema</u> (derivata di f^{-1}) Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di I (intervallo). Supponiamo che f sia invertibile e sia $f^{-1}: J \to I$ ($J = f(I)$) la funzione inversa. Se $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ATTENZIONE AI PUNTI

(NO DIM.) Alcuni commenti: se f fosse una retta il teorema è semplice da capire

$$y = \underbrace{y_0 + m(x - x_0)}_{f(x)} \iff x = \underbrace{\frac{1}{m}(y - y_0) + x_0}_{f^{-1}(y)}$$

Se f non è una retta si aggiungono degli $o(\cdot)$ e ... -

IN TERMINI "FUNZIONALI" LA FORMULA SOPRA DICE:

$$\left(f^{-1}\right)' \circ f = \frac{1}{f'} \iff \boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

<u>ESEMPIO</u> . SUPPONIAMO DI SAPERE GIÀ $(e^x)' = e^x$

CIOÈ se $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. $(\neq 0)$

SIA $g(x) = \ln(x)$ ALLORA $g = f^{-1}$

Dato che $f'(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow g$ è derivabile in ogni punto

e $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ CIOÈ: $g'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

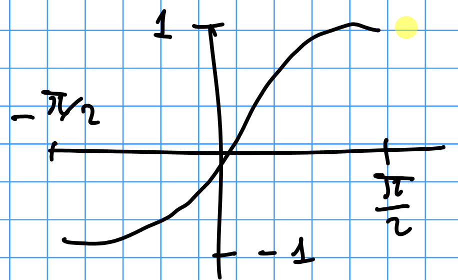
- SUPPONIAMO DI SAPERE CHE se $f(x) = \tan(x) \Rightarrow$
$f'(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \forall x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$.

Se $g(x) = \arctan(x) \Rightarrow \quad g = \left(f|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}$

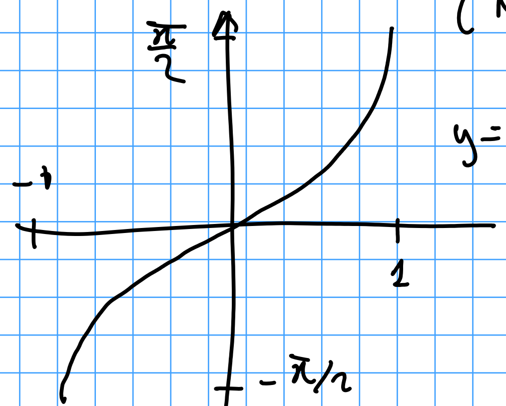
Dato che $f'(x) \geq 1 \Rightarrow g$ è derivabile in ogni punto e

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

- SUPPONIAMO DI SAPERE CHE se $f(x) = \sin(x) \Rightarrow$
$f'(x) = \cos(x)$. Restringo f a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Se
$g(x) = \arcsin(x)$ allora $g = f^{-1}$. Dato che
$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow g$ è derivabile in
ogni punto di $]-1, 1[$ (NON IN ± 1 !!)



$y = \sin(x)$



$y = \arcsin(x)$

e vale la formula

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(+ RADICE NON − RADICE)

dato che, se $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$

DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- Se $f(x) = \text{costante} \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = e^x$. $x_0 \in \mathbb{R}$ e facciamo il rapp incr.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0}$$

NOTA: il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow$ se $f(x) = e^x$ $f'(0) = 1$

- Se $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$= e^{\alpha \ln(x)} = e^{h(x)}$. Posso applicare il teorema di composizione dove $h(x) = \alpha \ln(x)$ e $g(y) = e^y$. Allora

$$h'(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad g'(y) = e^y \Rightarrow$$

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{e} \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot f'(x) =$$

$$e^{\alpha \ln(x)} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

È chiaro che se $\alpha \in \mathbb{N}$, o $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ la formula sopra si può ricavare in "maniera diretta", per es. se $f(x) = x^n = x \cdot x$, applico la f. del prodotto e trovo

$$f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

Si vede facilmente che la formula vale anche per $x < 0$ quando ha senso fare x^α per $x<0$

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x). \Rightarrow f'(x) = \cos(x), \quad g'(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{\sin(x - x_0)\cos(x_0) + \cos(x - x_0)\sin(x_0) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\cos(x_0)\,\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} + \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}\sin(x_0) \to \cos(x_0)$$

$$\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} \to 1 \qquad \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0} \to 0$$

- $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\cos(x)-\cos(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\cos(x-x_0)\cos(x_0)-\sin(x-x_0)\sin(x_0)-\cos(x_0)}{x-x_0} =$

$$\frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0}\cos(x_0) - \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\sin(x_0) \to -\sin(x_0)$$

I limiti notevoli dicono che $f'(0)=1$ e $g'(0)=0$

$(x\ \cos(x)\neq 0)$

- $f(x) = \tan(x) \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x)-(-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

<u>OSS.</u> DAI TEOREMI FATTI RISULTA CHE "L'OPERAZIONE DI DERIVATA"

$f \mapsto f'$ È LINEARE: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

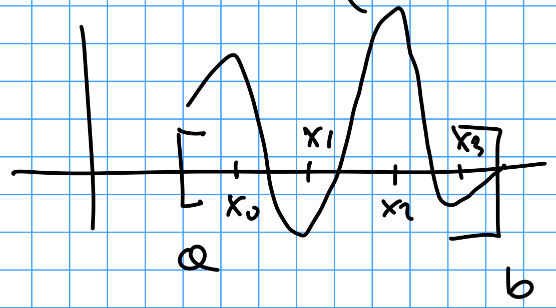
<u>DEF.</u> Se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$; dico che x_0

è punto di massimo (minimo) relativo se $f(x) \leq f(x_0)$ $(\geq)$ per ogni x vicino a x_0; CIOÈ: esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \underbrace{U \cap I}$$

$$\left(f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \underbrace{U \cap I} \right)$$

(se $I = [a,b]$ e x_0 è un estremo l'intorno "si dimezza")



← a è pto di min. rel. (e anche x_1, x_3)
b è pto di max rel (e anche x_0, x_2)

TEOREMA (di Fermat) Se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 NON È UN ESTREMO DI I, x_0 è punto di massimo (o minimo) relativo, e se f è derivabile in x_0

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

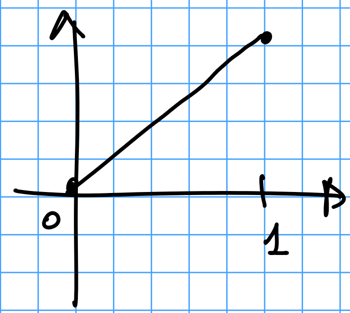
COMMENTI SUPPONIAMO $I = [a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$

(f continua $\Rightarrow$ esistono max / min di f su $[a,b]$)

Per trovare i pu punto di max (o di min), devo considerare

- gli estremi a, b
- gli eventuali punti in cui f non è derivabile
- i punti x in cui $\exists f'(x) = 0$ (i punti stazionari)

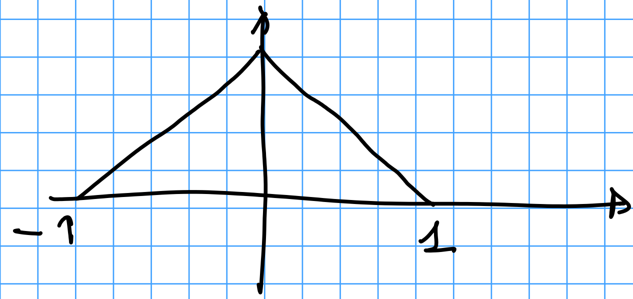
I PUNTI x IN CUI $f'(x)=0$ si chiamano PUNTI CRITICI o PUNTI STAZIONARI DI f



ESEMPI — $f(x) = x$ su $[0,1]$

- f NON HA PTI STAZIONARI
- pto di max è $x=1$ (e il max $=1$)
- pto di min è $x=0$ (e il min $=0$)

— $f(x) = 1-|x|$ su $[-1, 1]$



- f NON HA PUNTI STAZIONARI
- f HA 2 pti di minimo ($x=-1$, $x=1$) (e min $= 0$)
- f ha 1 pto di max ($x=0$) (e il max $=1$)

DIM. $x_0 \in I$, $x_0 \neq$ estremi, x_0 pto di max rel. $\Rightarrow$

$\exists\, \delta > 0$ tale che

$$]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I, \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

Per tali x guardo il rapporto incrementale di f

$$R(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x \in]x_0, x_0+\delta[\\ \geq 0 & \text{se } x \in]x_0-\delta, x_0[\end{cases}$$

Ma allora, se $\exists\, f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} R(x)}_{\leq 0} = \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} R(x)}_{\geq 0} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

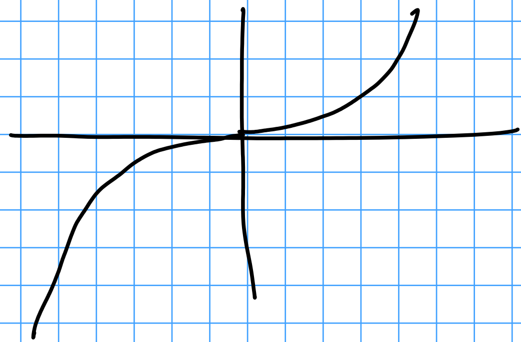
ATTENZIONE Il teorema ci dà una condizione necessaria MA NON SUFFICIENTE. Non è detto che x_0 stazionario $\Rightarrow$ x_0 di max/min rel.

Per esempio se $f(x) = x^3$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2$, dunque 0 è stazionario

MA f è strett. crescente

DUNQUE 0 NON È NÉ PTO DI MAX NÉ PTO DI MIN.



---

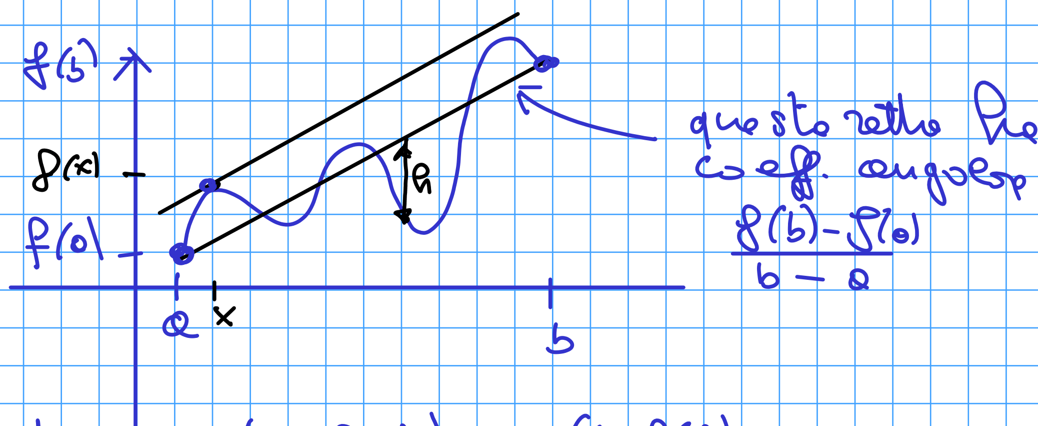
3 TEOREMI RIGUARDANTI LE FUNZIONI DERIVABILI SU $[a,b]$ (tra loro interdipendenti)

<u>Teorema</u> (di Lagrange) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile su $]a,b[$ e continua su $[a,b]$. Allora esiste un punto $x \in \,]a,b[$ tale che

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

c'è un punto x in cui la tangente al grafico di f è parallela alla "secante" passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$



Dim. Chiamo $g(x)$ la funzione (il cui grafico è la secante)

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

SI VEDE SUBITO CHE $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$

Introduco la funzione

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- h è continua su $[a,b]$
- h è derivabile su $]a,b[$, e $h'(x) = f'(x) - g'(x) =$

$$f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in]a,b[$$

PER WEIERSTRASS h HA MAX e MIN in $[a,b]$, cioè:

$\exists \ x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $h(x_1) \leq h(x) \leq h(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$

DISTINGUO DUE CASI

(a) almeno uno tra x_1 e x_2 appartiene ad $]a,b[$; chiamo ($\star$)
x questo punto. Per Fermat $\Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow$

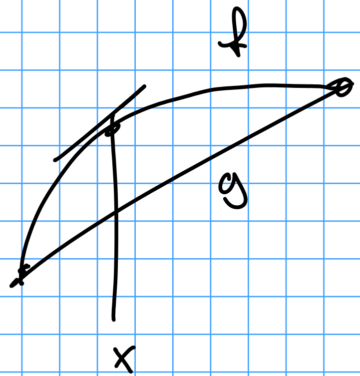
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{per } \circledast)$$

(b) entrambi — sia x_1 che x_2 — sono estremi (cioè sono uno tra a e b). MA

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0 \implies h(x_1) = h(x_2) = 0$$
$$h(b) = f(b) - g(b) = 0$$

ma allora $h(x) = 0 \quad \forall x$ a causa di $(\star)$

$\implies h'(x) = 0 \quad \forall x \in \,]a, b[$, e il teorema vale addirittura $\forall x \in \,]a, b[$ (IN QUESTO CASO $f = g$)



c'è un solo x in cui vale la tesi e x = pto di max per h

<u>CONSEGUENZA</u> Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \,]a,b[$

e f continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$

$\implies f(x) =$ costante.

DIM. Usando Lagrange vedo che, presi $x_1 < x_2$ in $[a, b]$ esiste $x \in]x_1, x_2[$ tale che:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) = 0 \quad (\text{perché } f' = 0 \text{ in tutti i pti})$$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ qualunque $x_1 \neq x_2$ $\Rightarrow$ f costante

ESEMPIO $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Allora $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} + \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) =$

$$\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

$\Rightarrow f$ costante. Però

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

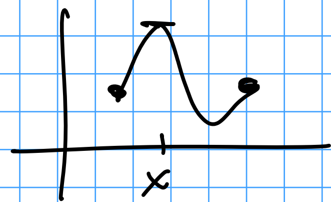
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$$

DOVE È L'ERRORE

Altre versioni del teorema di Lagrange.

<u>Teorema</u> (di Rolle) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, se $f(a)=f(b)$, allora esiste un punto x in $]a,b[$ in cui $f'(x)=0$

(conseguenza immediata di Lagrange)



<u>Teorema</u> (di Cauchy) Se $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Supponiamo che $g'(x)\neq 0 \ \forall x\in\,]a,b[$.

Allora $g(b)\neq g(a)$ ed esiste $x\in\,]a,b[$ per cui

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cauchy $\Rightarrow$ Lagrange se $g(x)=x$

DIMOSTRIAMO CHE Rolle $\Rightarrow$ Cauchy (e allora sono tutti equivalenti

Per farlo considero $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ — da trovare: Cerco λ e μ in modo che

$$h(a) = h(b) \iff$$

$$\lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda f(b) + \mu g(b) \iff$$

$$\lambda (f(a) - f(b)) = \mu (g(b) - g(a))$$

POSSO PRENDERE $\lambda = g(b) - g(a)$ $\mu = f(a) - f(b)$

Allora, per Rolle esiste $x \in]a, b[$ per cui $h'(x) = 0$, cioè

$$(g(b) - g(a)) f'(x) - (f(b) - f(a)) g'(x) = 0$$

NOTIAMO CHE: $g'(x) \neq 0$ per ipotesi

$g(b) - g(a) \neq 0$, se no $\exists\, x'$ (per Rolle) con $g'(x') = 0$ ASSURDO

$\Rightarrow$ POSSO DIVIDERE e OTTENGO:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

FINE