Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Diciasettesima lezione, 25 novembre 2011

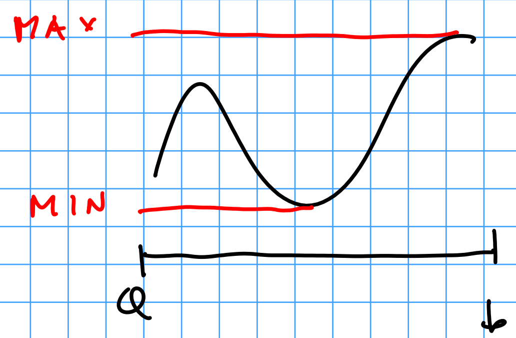
(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Teorema di Weierstrass

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 (pto di minimo) e x_2 (pto di massimo) tali che

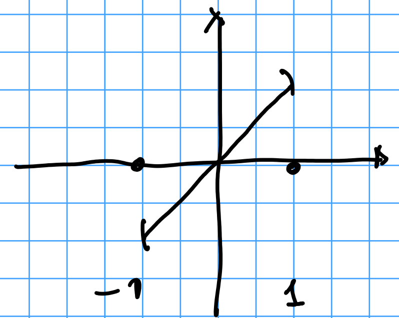
$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \min_{[a,b]} f}}{} \qquad\qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \max_{[a,b]} f}}{}$$



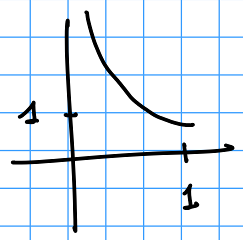
Commenti: Il teorema non vale se si rimuove qualche ipotesi:

- se f non è continua



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}$$

- se il dominio non è un intervallo chiuso:



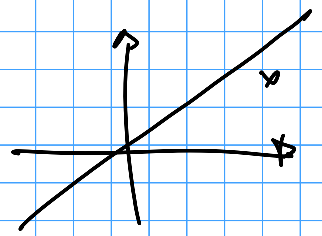
$f(x) = \frac{1}{x}$ (continua)

su $]0,1]$ (non è chiuso)

f NON HA MAX

- se il dominio non è limitato

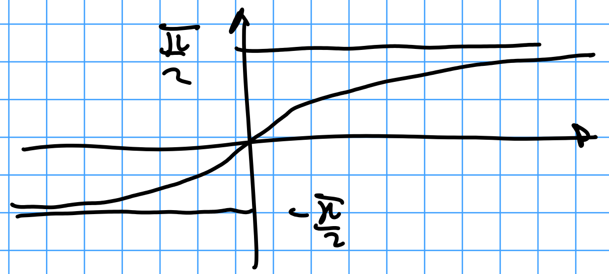
- $f(x) = x$ su $\mathbb{R}$



(non ha né max né min)

$(\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty, \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty)$

- $f(x) = \arctan(x)$ su $\mathbb{R}$



$\sup_{\mathbb{R}} f = \frac{\pi}{2}$, ma $f(x) \neq \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

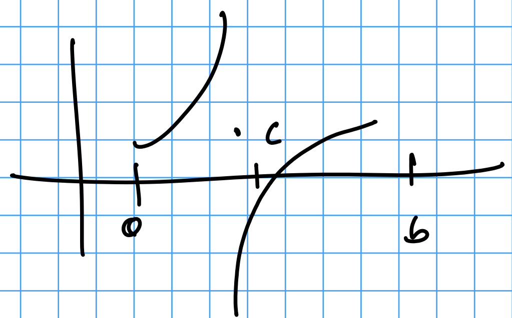
$\inf_{\mathbb{R}} f = -\frac{\pi}{2}$, ma $f(x) \neq -\frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DIM. Premettiamo un risultato preliminare se $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e se $a < c < b$

$$\Rightarrow \quad (*) \quad \sup_{[a,b]} f = \max\left(\sup_{[a,c]} f , \sup_{[c,b]} f \right)$$

(NON CONTA CHE f sia continua — DIPENDE DALLA DEF. di estremo superiore) NON LO DIMOSTRO

Se c'è il punto di max questo risultato è evidente — il risultato VALE ANCHE SE IL MAX NON ESISTE



DIAMO $(*)$ PER BUONO E PASSIAMO ALLA DIM. DEL TEOREMA

L'ESISTENZA DI $\max_{[a,b]} f$ è equivalente a dire

che esiste $\underbrace{x' \in [a,b] \text{ tale che } f(x') = \sup_{[a,b]} f}$

CERCHIAMO x' MEDIANTE UN PROCEDIMENTO DI BISEZIONE.

Poniamo $M = \sup_{[a,b]} f$ (esiste, eventualmente $+\infty$)

(1) Prendo $c = \frac{a+b}{2}$; ci sono due possibilità

$M = \sup_{[a,c]} f \Rightarrow$ Pongo $a_1 := a$, $b_1 := c$

oppure

$M = \sup_{[c,b]} f \Rightarrow$ pongo $a_1 := c$, $b_1 := b$

(2) prendo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; ci sono due possibilità

$M = \sup_{[a_1,c_1]} f \Rightarrow$ pongo $a_2 := a_1$ $b_2 := c_1$

oppure

$M = \sup_{[c_1,b_1]} f \Rightarrow$ pongo $a_2 := c_1$, $b_2 := b_1$

ITERANDO TROVO DUE SUCCESSIONI $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che:

(1) $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, cioè $\{a_n\}$ è crescente

$\{b_n\}$ è decrescente (e $a_n, b_n \in [a, b]$)

(2) $$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{4} = \dots = \frac{b-a}{2^n}$$

(3) $$\sup_{[a_n, b_n]} f = M \quad \left(= \sup_{[a,b]} f \right)$$

Per il teorema sulle successioni monotone, sia $\{a_n\}$ che $\{b_n\}$ hanno limite

$a_n \to \alpha \qquad b_n \to \beta \qquad a \le \alpha \le \beta \le b$

Per la (2) $b_n - a_n \to 0 \implies \alpha = \beta$

CHIAMIAMO x' il valore comune $\alpha = \beta$; dunque

$$\boxed{a_n \to x' \qquad b_n \to x'}$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE $f(x') = M$.

(4) Dimostro che $\boxed{M < +\infty}$. Se lo fosse avrei

$$\forall n \quad \sup_{a_n \le x \le b_n} f(x) = +\infty \iff$$

$\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists \; x_c \in [a_n, b_n]$ tale che $f(x_c) > c$

in particolare, se prendo $c = n$ trovo $x_n \in [a_n, b_n]$

per cui $\underbrace{f(x_n) \geq n}$. Per i due carabinieri si ha

$x_n \longrightarrow x'$ $\quad (\underset{\downarrow x'}{a_n} \leq x_n \leq \underset{\downarrow x'}{b_n})$

DATO CHE f è continua $f(x_n) \to f(x') \in \mathbb{R}$

MA $f(x_n) \geq n \Rightarrow f(x_n) \to +\infty \leftarrow$ ASSURDO

(UNICITÀ DEL LIMITE!)

(5) Dunque $M \in \mathbb{R}$ e allora, per definizione di $\sup\limits_{[a_n, b_n]} f$

- $f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a_n, b_n]$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; x_\varepsilon \in [a_n, b_n]$ tale che $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$

Se prendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ trovo x_n tale che

$$\underbrace{x_n \in [a_n, b_n]}_{*} \quad e \quad \underbrace{M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M}_{**}$$

Allora, per i due carabinieri, (*) $x_n \to x'$.

Per la continuità di $f \Rightarrow f(x_n) \to f(x')$

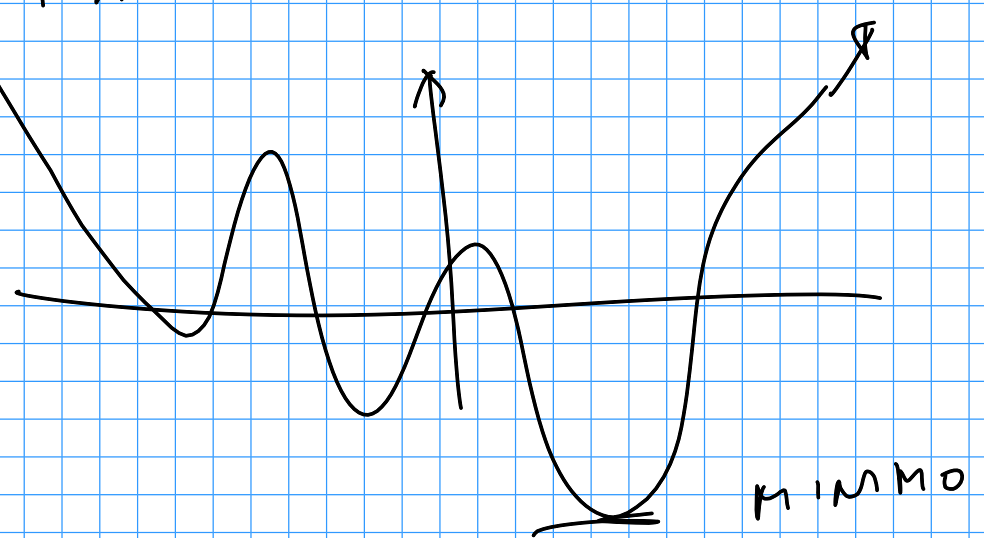
Per (**) $\Rightarrow f(x_n) \to M$

Per l'unicità del limite $\Rightarrow f(x') = M = \sup_{[a,b]} f$

HO DIMOSTRATO CHE x' È PTO DI MAX

(In modo analogo si dimostra che $\exists$ minimo)

UNA POSSIBILE GENERALIZZAZIONE QUANDO f È DEFINITA SU $\mathbb{R}$:



Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua e $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ f HA MINIMO (OVVIAMENTE $\nexists$ MAX)

Dim. Cerco di ricondurmi a Weierstrass: voglio mettermi in un intervallo $[-c, c]$ tale che
$\inf_{[-c,c]} f = \inf_{\mathbb{R}} f$. Per trovare questo c uso le proprietà all'∞ di f.

- Dato che $f(x) \to +\infty$ se $x \to +\infty$ trovo un c_1 tale che
  $c_1 \geq 0$ $\forall x \geq c_1$ $f(x) \geq f(0)$
- Dato che $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$ trovo c_2 tale che
  $c_2 \leq 0$ e $\forall x \leq c_2$ $f(x) \geq f(0)$

è chiaro che posso prendere $c = \max(c_1, -c_2)$
e ottenere $f(x) \geq f(0)$ $\forall x \notin [-c, c]$

Ma, per Weierstrass, f ha minimo su $[-c,c]$
e tale minimo è $\leq f(0)$ (dato che $0 \in [-c, c]$)

$\Longrightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \min_{[-c,c]} f \Longrightarrow \min_{\mathbb{R}} f = \min_{[-c,c]} f$

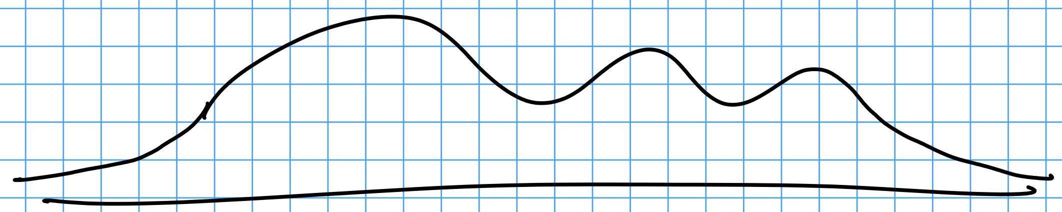
(se $x \in [-c,c]$ è per la definizione di minimo,

se $x \notin [-c,c]$ so che $f(x) \geq f(0) \geq \min_{[-c,c]} f$)

ALTRA POSSIBILE GENERALIZZAZIONE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua, tale che $f(x) > 0$ e

$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} f(x) = 0$



$\Longrightarrow$ f HA MASSIMO.

DIM. Dato che $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$

Trovo $c > 0$ tale che

se $x \notin [-c, c]$ $\qquad f(x) < \frac{f(0)}{2}$

Per Weierstrass f ha massimo su $[-c, c]$

e tale max è $\geq f(0)$.

Fuori da $[-c, c]$ $\qquad f < \frac{f(0)}{2}$

$$\Rightarrow \quad \max_{[-c,c]} f = \max_{\mathbb{R}} f$$

<u>oss</u> IL TEOREMA SCRITTO SOPRA VALE ANCHE SE $f(x) \geq 0$. INFATTI

- Se $f(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$ è ovvio
- Se $f(x) \geq 0$ ma non è sempre zero $\Rightarrow$ c'è x_0 in cui $f(x_0) > 0$. Posso ripetere la dim. sopra usando x_0 al posto di zero

ESEMPIO (NON BANALE)

· Esiste una costante M tale che
$$|\sin(x)| \leq M|x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

DIM. Definisco $f(x) = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$, per $x \neq 0$

Sapendo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow$

Posso definire $f(0)=1$ e così ottengo una $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Per dimostrare la disug. devo dim. che f È LIMITATA su $\mathbb{R}$

Notiamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (LIMITATA × INFINITESIMA)

DUNQUE POSSO USARE L'ARGOMENTO PRECEDENTE

$\Rightarrow$ f HA MAX su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f è limitata $\Rightarrow$ $\exists\, M:$ $|\sin(x)| \leq M\,|x|$

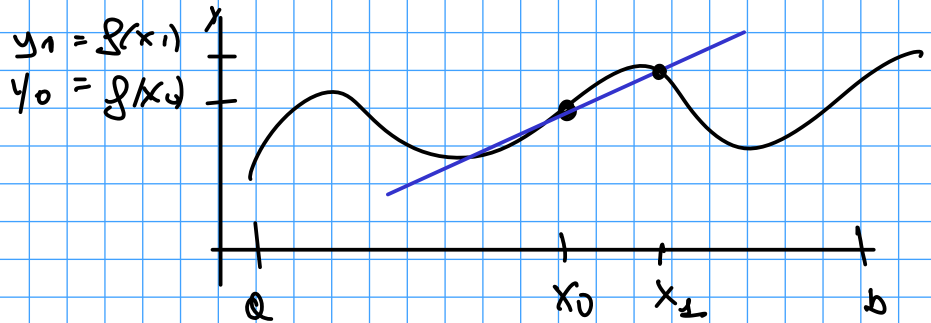
($M \geq 1$!!!).

INTRODUZIONE DELLA DERIVATA

Possibili "fonti" della nozione di derivata:

(a) definizione di tangente a una curva
(b) definizione di velocità

(a) Supponiamo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; $x_0 \in [a,b]$



$(x_0, y_0) \in$ GRAFICO. VOGLIO DEFINIRE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO, NEL PUNTO (x_0, y_0)

PRENDIAMO $x_1 \neq x_0$, CI SARÀ UN ALTRO PUNTO (x_1, y_1) sul grafico, dove $y_1 = f(x_1)$

CONSIDIDERIAMO LA RETTA PER QUESTI DUE PUNTI:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \left(y = y_0 + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \right)$$

IDEA: QUANDO $(x_1, y_1) \to (x_0, y_0)$ sul grafico

la retta $\to$ tangente $\sim$

se $x_1 \to x_0$ il coeff. angolare $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \to m$

dove m = coeff. angolare della retta tangente

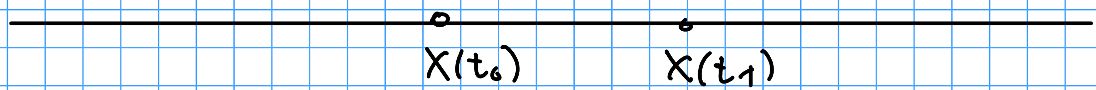
PERCHÉ TUTTO FUNZIONI IL LIMITE

$$m = \boxed{\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$ deve esistere

Se ciò avviene l'eq. della retta tangente è proprio

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

(b) Supponiamo che $x(t)$ rappresenti la posizione di un punto al variare del tempo t — posizione su una retta



Se $t_0 \neq t_1$ sono due istanti, l'espressione

$$\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$$ rappresenta la "velocità media"

tenuta dal corpo nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$

È ragionevole che

$$\lim_{t_1\to t_0} \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} \quad (\text{se esiste})$$

sia la "velocità istantanea" al tempo t_0

IN GENERALE se $f(x)$ è una quantità

che varia con x $\Rightarrow$

$$\lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad (\text{se esiste})$$

rappresenta il "tasso di variazione" quando $x=x_0$

DEF Se $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e se esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

dirò che f è "derivabile" nel punto x_0.
Indicherò con $f'(x_0)$ il limite scritto sopra

($f'(x_0)$ è un numero, il cui valore dipende dalla $f(x)$ per x vicino a x_0)

Se $f'(x_0)$ esiste FINITO per ogni x_0 in I, dirò che f è derivabile in I. In questo caso f' è

una nuova funzione definita su I (che ad ogni $x_0 \in I$ associa $f'(x_0)$)

ANALOGAMENTE POSSO DEFINIRE

f'' come $(f')'$ e

$f^{(n)}$ come la derivata fatta n volte

CONVIENE SCRIVERE $f^{(0)} = f$

$$\left(f^{(1)} = f' \;,\; f^{(2)} = f'' \;,\; f^{(3)} = f''' \;\ldots \right)$$

per dire che non è una potenza

FATTO Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0.

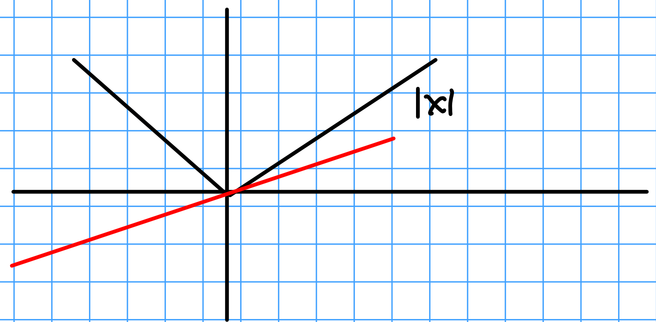
Dim.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

NOTA: Il viceversa NON è VERO. Se $f(x) = |x|$



f è continua

$$\left(\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \right)$$

MA

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\Rightarrow \nexists f'(0)$$

NON C'È LA TANGENTE IN ZER