Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Sedicesima lezione, 19 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

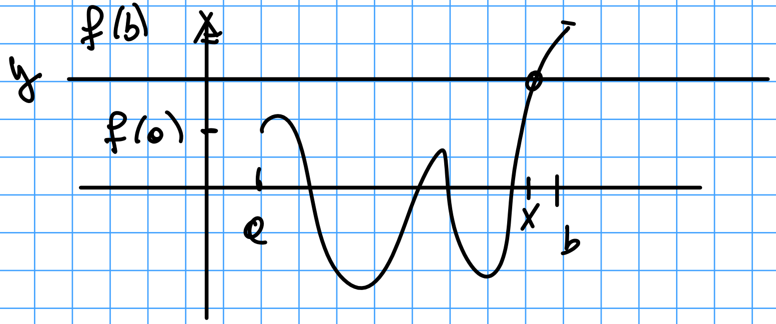
Teorema dei valori intermedi

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

$\Rightarrow$ f assume tutti i valori y compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

cioè se $f(a) \leq y \leq f(b)$ (o viceversa)

allora esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$



Dim. Si deduce dal teorema degli zeri: prendo $g(x) := f(x) - y$.

- g è continua
- $g(a) \leqslant 0$; $g(b) \geqslant 0$

Per il t. zeri $\Rightarrow$ $\exists\, x : g(x) = 0 \iff \exists\, x : f(x) = y$

VARIE CONSEGUENZE

Fatto Se $f : A \to \mathbb{R}$ continua su A. Se $I \subset A$, I intervallo (aperto / chiuso ... limitato / illimitato)

$\Rightarrow \quad f(I)$ è un intervallo

<u>Dim.</u> Uso la seguente proprietà:

(★) [I è un intervallo $\Leftrightarrow$ dati $x_1 < x_2$ punti di I e dato $x_1 \leq x \leq x_2$, allora $x \in I$

(gli intervalli sono gli insiemi convessi in $\mathbb{R}$)]

dimostrazione che se I è un intervallo $\Rightarrow f(I)$ è intervallo

Lo faccio così: prendo y_1 e y_2 in $f(I)$ e $y \in \mathbb{R}$

con $y_1 \leq y \leq y_2$; dimostro che $y \in f(I)$ (da ★ $\Rightarrow f(I)$ int.)

Ora che $y_1 \in f(I)$ significa $\exists\, x_1 \in I : f(x_1) = y_1$

$y_2 \in f(I)$ " " $\exists\, x_2 \in I : f(x_2) = y_2$

Dato che I è un intervallo $\Rightarrow [x_1, x_2] \subset I$ (o $[x_2, x_1]$ ..)

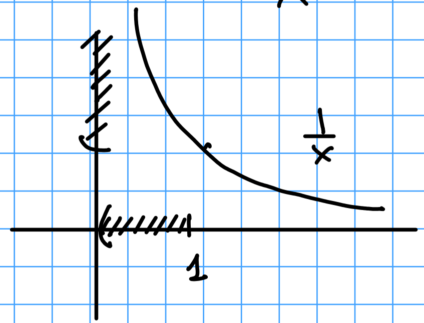
Applicando il T. val. intermedi a $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R} \Rightarrow$

trovo $x \in [x_1, x_2] \subset I$ tale che $f(x) = y \Rightarrow y \in f(I)$ #

Oss. Può succedere che

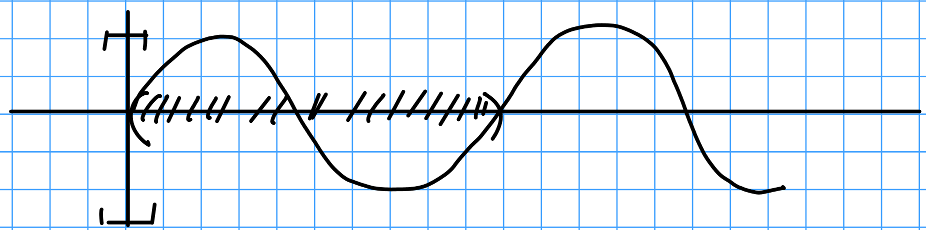
- I limitato, ma $f(I)$ illimitato, per esempio

$f(x) = \frac{1}{x}$, $I =]0,1[$, $f(I) =]1,+\infty[$



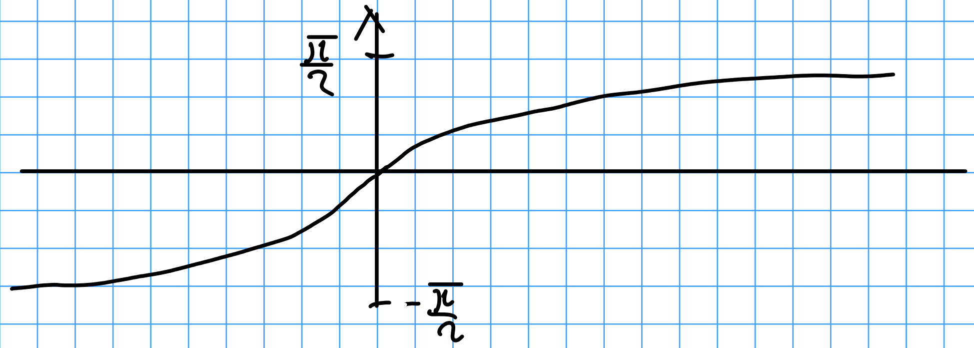
- I aperto, ma $f(I)$ chiuso

$f(x) = \sin(x)$, $I =]0, 2\pi[$, $f(I) = [-1,1]$



- I illimitato, $f(I)$ limitato

$f(x) = \arctan(x)$, $I = \mathbb{R}$, $f(I) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



NOTA Non riesco a trovare un esempio in cui I chiuso, $f(I)$ aperto (vedi il Teorema di W. ..)

Teorema $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua. Allora

$$f \text{ è iniettiva} \iff f \text{ è strettamente monotona}$$

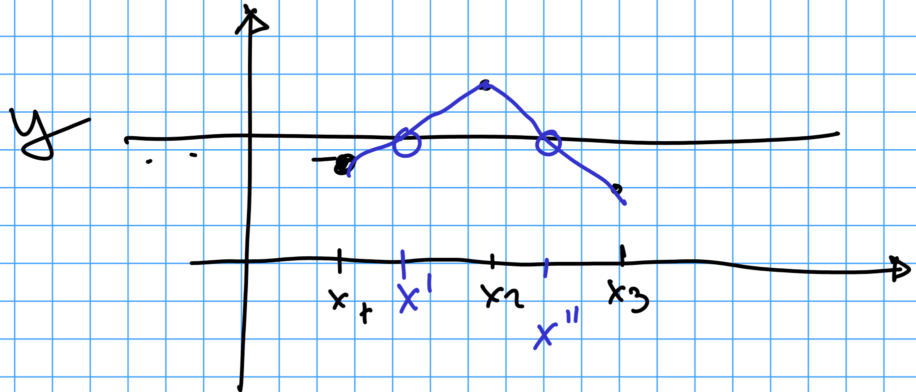
Dim. "$\Leftarrow$" ovvia. Dimostro "$\Rightarrow$". Ragioniamo per assurdo e supponiamo che f non sia strettamente monotona.

$\Rightarrow$ ci sono almeno tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ sui quali vale

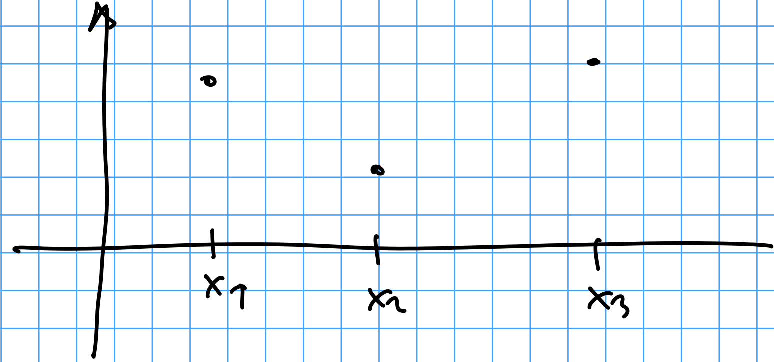
$$\boxed{f(x_1) \leq f(x_2) \quad e \quad f(x_3) \leq f(x_2)}$$

OPPURE

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad e \quad f(x_3) \geq f(x_2)$$



oppure



GUARDIAMO IL PRIMO CASO. Prendo $y = \max(f(x_1), f(x_3))$

(o anche $\max(f(x_1), f(x_3)) \le y < f(x_2)$)

(Nota se $f(x_3) = f(x_2)$ o $f(x_1) = f(x_2)$ avrei già un assurdo perché f non sarebbe iniettiva)

Applicando il t. valori intermedi in $[x_1, x_2]$ trovo $x' \in [x_1, x_2[$ tale che $f(x') = y$

Per lo stesso motivo (su $[x_2, x_3]$) trovo $x'' \in]x_2, x_3]$ tale che $f(x'') = y$ ASSURDO se f è iniettiva:

$x' < x''$ ma $f(x') = f(x'')$ #

A QUESTO PUNTO POSSIAMO DIM. LA CONTINUITÀ DI f^{-1}

__Teorema__ Se $f: I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, allora

(a) $J := f(I)$ è un intervallo

(b) $f^{-1}: J \to I$ è continua.

__Dim.__ (a) già dimostrato

(b). f deve essere strett. monotona (per il teorema appena visto).

Mettiamo che f sia strett. crescente.

Allora __$f^{-1}: J \to I$ è strett. crescente__. Infatti:

Siano $y_1 < y_2$ $(\in J)$. Se fosse $x_1 := f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) =: x_2$

avrei $f(x_1) \geq f(x_2)$. MA $f(x_1) = f(f^{-1}(y_1)) = y_1$

$f(x_2) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2$

$\Rightarrow y_1 \geq y_2$ ASSURDO

Allora dato $y_0 \in J$ esistono

$$\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0) \leq \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$$

(se y_0 non è estremo, se no..

Per dimostrare che f^{-1} è continua in y_0 devo dim. che

i "$\leq$" sono "$=$" Dimostriamo per esempio che

$$f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = \inf_{y > y_0} f^{-1}(y)$$

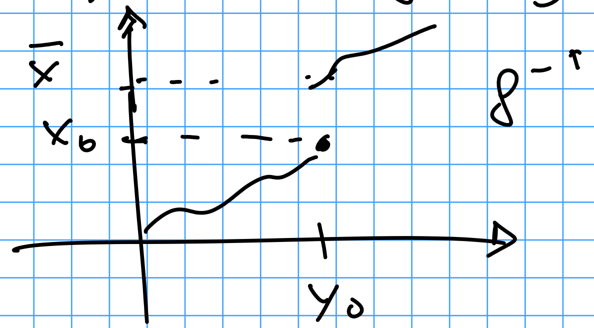
so che vale per la caratterizzazione del limite dx

Se non fosse vero avrebbe

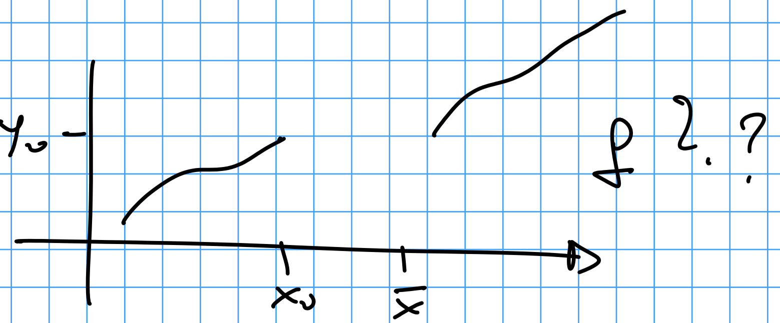
$$f^{-1}(y_0) < \inf_{y>y_0} f^{-1}(y) \quad (\text{chiamo } \bar{x} \text{ quest'inf})$$

Questo "$<$" significa che

$\forall\, y > y_0 \quad f^{-1}(y) \geq \bar{x} > f^{-1}(y_0) = x_0$ (x_0 è il punto in cui $f(x_0) = y_0$)



$\Rightarrow$



i punti x con $x_0 < x < \overline{x}$ non sono in I

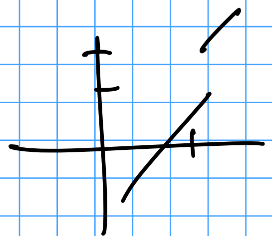
ASSURDO perché I è un intervallo

(se f^{-1} non fosse continua ci sarebbe un "buco" in I !!)

Si può anche dire così:

<u>Teorema</u> Sia $f : I \to \mathbb{R}$ monotona.

f continua $\iff$ $f(I)$ è intervallo



DISCONTINUA

(e l'ho applicato a f^{-1})

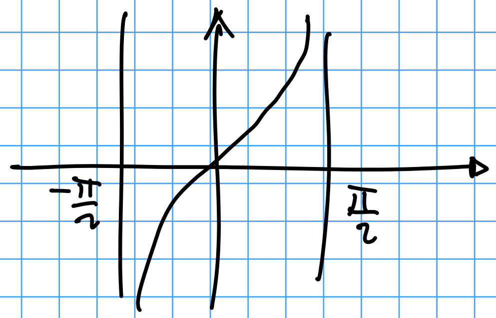
#

<u>VARI ESEMPI</u>

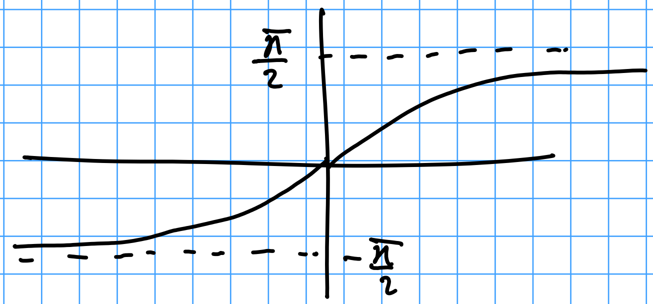
- $f(x) = \sqrt[n]{x}$
- $f(x) = \ln(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \arcsin(x)$ / $\arccos(x)$

• $\arctan(x)$ è l'inverso della funzione $y = \tan(x)$ RISTRETTA

A $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



$\Longrightarrow$



$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Si può aggiungere alla conclusione del Teorema su f^{-1}:

$f : I \to f(I) =: J$ — f crescente —

Se a e b sono gli estremi di I (anche infiniti)

$\Rightarrow$ J ha estremi α e β dove:

$$\alpha = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \beta = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

(se $a, b \in I$ allora $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$)

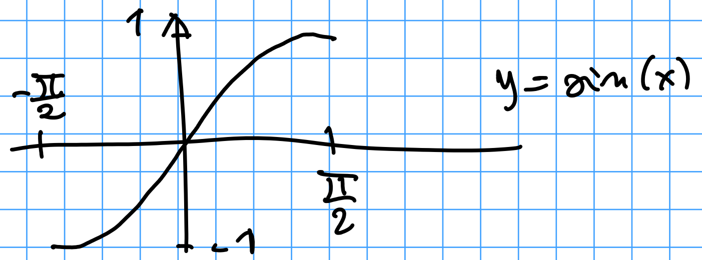
e allora $\lim_{y\to\alpha^+} f^{-1}(y) = a$, $\lim_{y\to\beta^-} f^{-1}(y) = b$

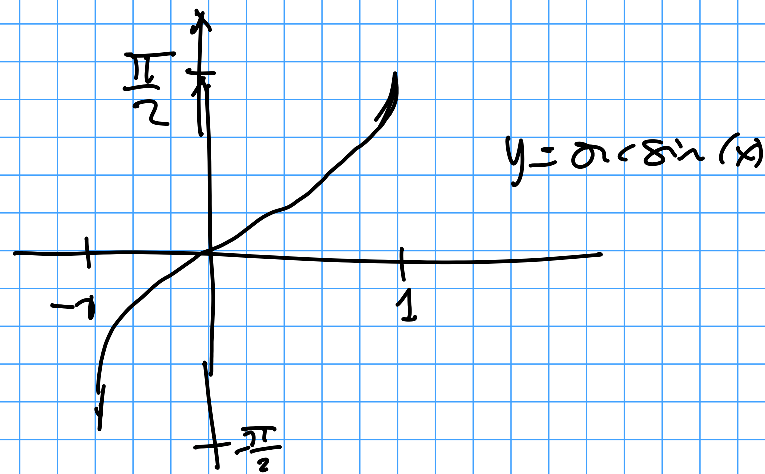
(la dim. è simile a quella per i punti di J)

Nell'esempio con $f(x) = \tan(x)$ $\quad a = -\frac{\pi}{2}$ $\quad b = \frac{\pi}{2}$

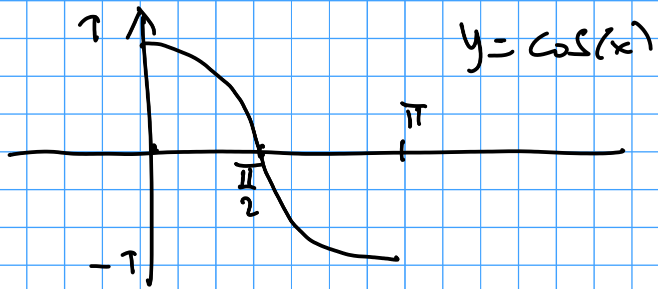
$\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$

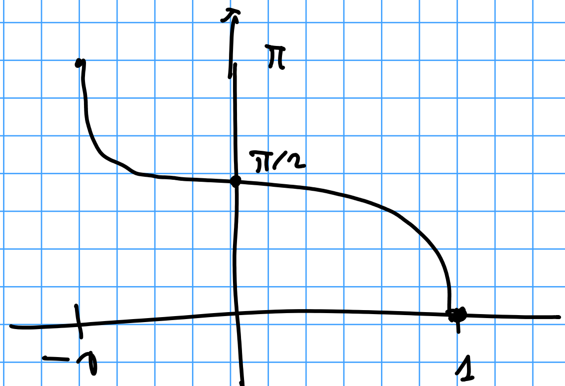
- La funzione $\arcsin(x)$ è l'inverso di $\sin(x)$ RISTRETTA A $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$





- La funzione $\arccos(x)$ è l'inverso di $\cos(x)$ RISTRETTA A $[0, \pi]$





Qualche altro esempio (di funzioni inverse)

FUNZIONI IPERBOLICHE. CHIAMO

seno iperbolico di x $\quad \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

coseno iperbolico di x $\quad \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

tangente iperbolica di x $\quad \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

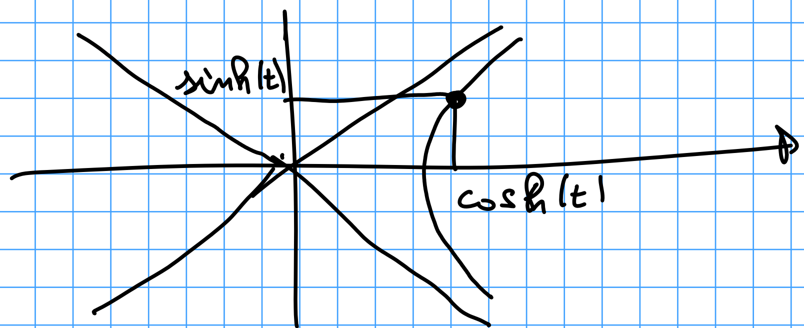
FATTI:

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$$

dunque se $x = \cosh(t)$ $y = \sinh(t)$, allora

al variare di t in $\mathbb{R}$ il punto (x, y) descrive

il ramo destro dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$



(quello di sinistro è descritto da $(-\cosh(t), \sinh(t))$)

(se invece prendo $(\cos(t), \sin(t)) \to$ descrivo la circonferenza $x^2+y^2=1$)

DIM.

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{\cancel{e^{2x}} + 2\overbrace{e^x e^{-x}}^{=1} + \cancel{e^{-2x}} - \left(\cancel{e^{2x}} - 2\overbrace{e^x e^{-x}}^{=1} + \cancel{e^{-2x}}\right)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

CI SONO MOLTE ANALOGIE CON LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

- $$\sinh(x-y) = \underbrace{\sinh(x)\cosh(y) - \sinh(y)\cosh(x)}_{(*)}$$

DIM

$$(*) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y+e^{-y}}{2} - \frac{e^y-e^{-y}}{2}\,\frac{e^x+e^{-x}}{2} =$$

$$\frac{\cancel{e^{x+y}} - e^{y-x} - \cancel{e^{-(x+y)}} + e^{x-y}}{4} - \frac{\cancel{e^{x+y}} + e^{y-x} - e^{x-y} - \cancel{e^{-(x+y)}}}{4} = \frac{e^{x-y} - e^{y-x}}{2}$$

$\sinh(x-y)$ $\shortparallel$

#

NOTA: $\sinh(x)$ è DISPARI
$\cosh(x)$ è PARI (si vede subito)

POTEVO SCRIVERE: $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$

$$\left(\sinh(-x) \quad \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = -\sinh(x)\right)$$

Queste definizioni sono suggerite dalle formule (definizione)

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \left(e^{a+ib} = e^{a}(\cos(b) + i\sin(b))\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\left(\text{allora} \quad \cos(ix) = \cosh(x) \; ; \quad \sin(ix) = i\sinh(x)\right)$$

$$\sin(ix) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\,\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Vediamo $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) =$

$$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=$$

$$\frac{e^{x+y}+\cancel{e^{x-y}}+\cancel{e^{y-x}}+e^{-(x+y)}}{4}+$$

$$\frac{e^{x+y}-\cancel{e^{y-x}}-\cancel{e^{x-y}}+e^{-(x+y)}}{4}=$$

$$\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\cosh(x+y)$$

$\left(\cosh^2 = 1+\sinh^2\right.$

IN PARTICOLARE

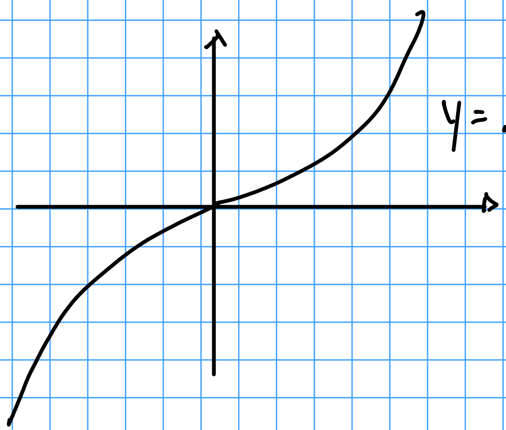
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x)+\sinh^2(x) = \begin{cases} 1+2\sinh^2(x) \\ 2\cosh^2(x)-1 \end{cases}$

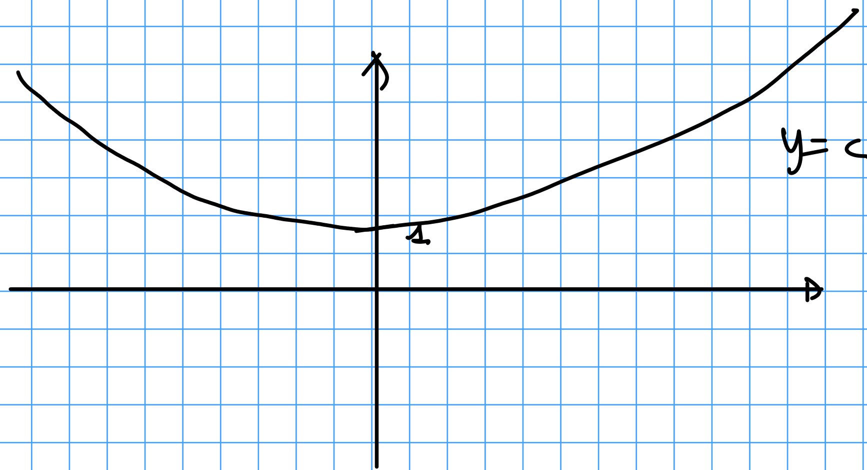
(da cui $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$ $\quad \left(\begin{cases} + \text{ se } x>0 \\ - \text{ se } x<0 \end{cases}\right)$

$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)+1}{2}}$

<u>NOTA</u> $\sinh(x) > 0 \iff x > 0$

$\cosh(x) \geq 1 \quad \forall x$ (?!) (





$\lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$

$\lim_{x \to {+\infty \atop -\infty}} \cosh(x) = +\infty$

Si può vedere (quando faremo le derivate sarà semplice)

che entrambe le funzioni sono crescenti su $[0, +\infty[$

("tipo prostaferesi") $\Rightarrow \cosh(x) \geq \cosh(0) = 1$

---

chiamo arcsinh l'inverso di sinh (su $\mathbb{R}$)

arccosh l'inverso di cosh su $[0, +\infty[$

Tali funzioni si possono esprimere in termini di $\ln(x)$

• $\text{arcsin}h(y) = x \iff y = \sin h(x) \quad \left(= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

Dunque devo risolvere $2y = e^x - e^{-x}$ ← MOLTIPLICO PER e^x

$2e^x y = e^{2x} - 1$ cioè $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$

(equazione di II° grado in $\underline{\underline{t = e^x}}$)

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow t = t_{1,2} := y \pm \sqrt{y^2+1}$$

$$= \begin{cases} y + \sqrt{y^2+1} > 0 \quad \circledast \\ y - \sqrt{y^2+1} < 0 \end{cases}$$

Allora $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ (quella negativa non va bene)

$$\text{arcsin}h(y) = x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

→ VEDIAMO L'ARCCOSH. Devo risolvere

$$2y = e^x + e^{-x}, \quad \text{MOLTIPLICO PER } e^x$$

$$e^{2x} - 2y e^{x} + 1 = 0 \quad ; \quad \text{se } t = e^{x}$$

$$t^2 - 2y\,t + 1 = 0$$

$$t = t_{1,2} := \begin{cases} y + \sqrt{y^2-1} \\ y - \sqrt{y^2-1} \end{cases} \qquad \text{SE } |y| \geq 1$$

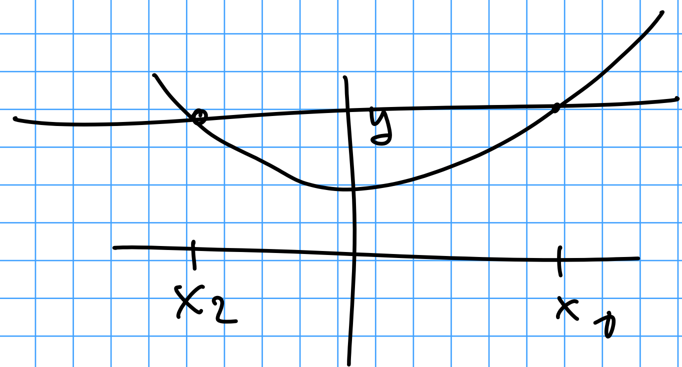
Se voglio che $t_{1,2} \geq 0$ DEVE ESSERE $\boxed{y \geq 1}$

TORNA CON IL FATTO CHE $\cosh(x) \geq 1 \Rightarrow \operatorname{arccosh}(y)$ è definito per $y \geq 1$

Se allora $y \geq 1$ HO DUE POSSIBILI VALORI

$$x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

$$x_2 = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$$



IN EFFETTI $x_2 = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) =$

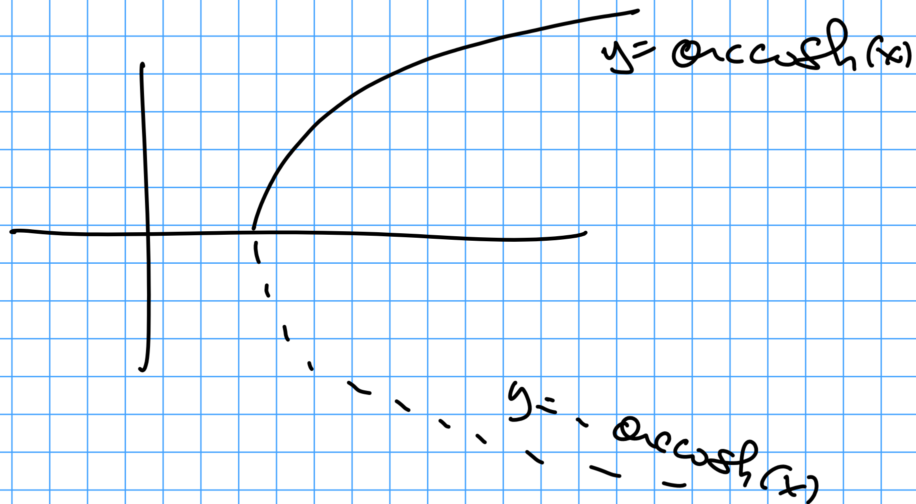
$$\ln\left(\frac{(y-\sqrt{y^2-1})(y+\sqrt{y^2-1})}{y+\sqrt{y^2-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\right) =$$

$$-\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) = -x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \cosh(y)$$

$$x_2 = -\cosh(y)$$

DUNQUE $\operatorname{arccosh}(y) = \ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right) \quad \forall y \geq 1$



$$\lim_{x \to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$$

PASSIAMO AI LOGARITMI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$$ (alla fine torneremo indietro)

FORMA $\frac{0}{0}$ (all'inizio era 1^∞)

CERCO DI RICONDURMI AI LIMITI NOTEVOLI

I° MODO

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \frac{\ln(1+\overbrace{\cos(x)-1}^{\text{tende a zero}})}{x^2} =$$

$$\underbrace{\frac{\ln(1+\cos(x)-1)}{\cos(x)-1}}_{①} \cdot \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{②} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0} ② = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0} ① = (t=\cos(x)-1) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

II° MODO (con gli o-piccoli)

$$\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = (*)$$

So che (1) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (per $x \to 0$)

e che (2) $\ln(1+y) = y + o(y)$ (per $y \to 0$)

$$(*) \underset{(1)}{=} \frac{\ln\Big(1 \overbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}^{y}\Big)}{x^2} \underset{\substack{(2)\\ \text{con } y = \dots}}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)}{x^2} =$$

$\left(-2 = O(1)\right) \Rightarrow \; o\left(-\frac{x^2}{2}\right) = o(x^2)$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} (*) = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

(e anche $\dfrac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{o(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{2} + o(1) \to -\dfrac{1}{2}$)

Alla fine $\displaystyle\lim_{x\to0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$