Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quindicesima lezione, 18 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Funzioni continue

Def. $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo (o unione di intervalli)

$x_0 \in I$ dico che f è continua in x_0 se

$$(\text{esiste}) \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dico che f è continua su un sottoinsieme $J \subset I$ se

$\forall x_0 \in J$ f è continua in x_0.

Di solito si dice che f è continua se f è continua in ogni x_0 del suo dominio

DAI TEOREMI VISTI PER I LIMITI SI RICAVA:

Teoremi Se f e g sono continue in un un pto x_0 $\Rightarrow$

(a) $f + g$ è continua in x_0

(b) $f \cdot g$ è continua in x_0

(c) $\dfrac{f}{g}$ è continua in x_0, a patto che $g(x_0) \neq 0$

Teorema (COMPOSIZIONE) Se $f: I \to J \subset \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$. Se $y_0 = f(x_0)$ e se $g: J \to \mathbb{R}$ continua in y_0 $\Rightarrow$ $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

DIM. Devo dim. che

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) = g(y_0)$$

Cioè devo far vedere che se $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ $\Rightarrow$

$$g(f(x_n)) \to g(y_0)$$

SO CHE $f(x_n) \to y_0$ (CONTINUITÀ DI f in x_0)

(MA NON SO CHE $f(x_n) \neq y_0$) Noto che se $f(x_n) = y_0$ $\Rightarrow$ $g(f(x_n)) = g(y_0)$ DUNQUE POTREI SUDDIVIDERE GLI INDICI n in due:

- n: $f(x_n) \neq y_0$ (1)
- n: $f(x_n) = y_0$ (2)

Nel caso (1) posso USARE il fatto che $g(f(x_n)) \to g(y_0)$ per continuità di g in y_0

Nel caso (2) è ovvio che $g(f(x_n)) = g(y_0) \to g(y_0)$

NE DEDUCO CHE $g(f(x_n)) \to g(y_0)$ #

- NEL CASO DELLA CONTINUITÀ SI HA:

f è continua in x_0 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\forall\, V \text{ intorno di } f(x_0)\ \exists\, U \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(U) \subset V}$

(ma ora non escludo x_0)

- Si potrebbe vedere che se f è definita in $I \setminus \{x_0\}$, allora esiste un valore y_0 tale che, se definisco $f(x_0) = y_0$, tale funzione risulta continua in x_0

$$\Updownarrow$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

ESEMPIO Se prendo $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $x \neq 0$. Si vede che per "estendere f" a zero in modo da avere una funzione continuo, devo prendere $f(0)=1$. Questo risulta da

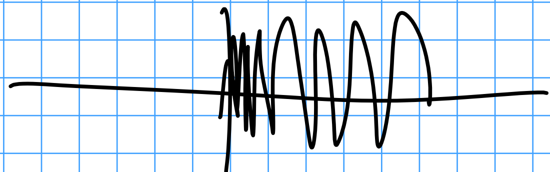
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

<u>DEF.</u> Se f è definita in $I\setminus\{x_0\}$ ma esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$ si dice che x_0 è un "punto di discontinuità eliminabile". In questo caso se estendo f ponendo $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$ la funzione così estesa è continua in x_0.

[È CHIARO CHE, se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste o se tale limite esiste ma fa $\pm\infty$ $\Rightarrow$ NON È POSSIBILE PROLUNGARE f in x_0 "con continuità"]

<u>PER ESEMPIO</u> $f(x)=\frac{1}{x}$ NON È PROLUNGABILE IN ZERO A UNA FUNZIONE CONTINUA

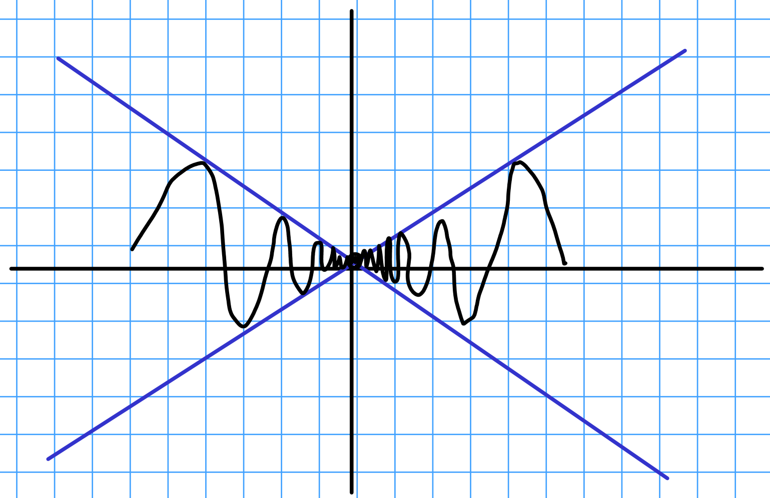
<u>ALTRO ESEMPIO</u> $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$



INVECE $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è prolungabile con continuità prendendo $f(0) = 0$. INFATTI

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(prodotto di x, che tende a zero e $\sin(1/x)$ che è compreso tra -1 e 1)



ESEMPI ELEMENTARI

- $f(x) =$ costante, $f(x) = x$ continue su $\mathbb{R}$
- $f(x) =$ polinomio $\Rightarrow f$ continua
- $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q polinomi (f funzione RAZIONALE) è continua su $\mathbb{R} \setminus \{$zeri di $Q\}$

- $f(x) = e^x$ è continua

(RICORDIAMO CHE ABBIAMO DETTO $e^x = \sup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q < x}} e^q \underset{(\text{NO DIM})}{=} \inf_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > x}} e^q$; SAPENDO COSA è e^q per $q \in \mathbb{Q}$)

<u>Dimostriamo</u> la continuità di $f(x) = e^x$ in $x = 0$.

Per questo dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0^-} e^x = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

Tali limiti dx e sx <u>ESISTONO</u> per la crescenza della funzione e^x

(e si ha $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} e^x = \sup_{x < 0} e^x$; $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} e^x = \inf_{x > 0} e^x$)

Ma se i limiti dx/sx esistono, allora per dimostrare che fanno 1 basta calcolare il limite su due successioni, una che tende a zero da sinistra e una che tende a zero da destra (per la definizione "successionale" di limite). Se prendiamo $x_n = -\frac{1}{n}$ troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} e^{x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}} = 1 \quad \left(\text{VISTO NEI RISULTATI SULLE SUCCESSIONI}\right)$$

Analogamente, prendendo $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e} = 1$$

e quindi

$$\boxed{\lim_{x\to 0} e^{x} = 1}$$

CASO GENERALE $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} \left(e^{x-x_0}\right) e^{x_0} = \left(\lim_{t\to 0} e^t\right) e^{x_0} = e^{x_0}$$

($t = x - x_0$, cambio di variabile)

- $\sin(x)$, $\cos(x)$ continue in ogni $x \in \mathbb{R}$
- si comincia da $x_0 = 0$ e si mostra che

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \quad \left(\text{uso la } \underline{\text{dis.}} \quad |\sin(x)| < |x| \ \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

- si dimostra che $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \underline{1}$

$$\left(\text{se } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \right)$$

- <u>CASO GENERALE</u> $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \lim_{x\to x_0} \big[\underbrace{\sin(x-x_0)}_{\to 0} \underbrace{\cos(x_0)}_{\to \cos(x_0)} + \underbrace{\cos(x-x_0)}_{\to 1} \underbrace{\sin(x_0)}_{\to \sin(x_0)}\big] =$$

$x = (x - x_0) + x_0$

$\sin(x_0)$

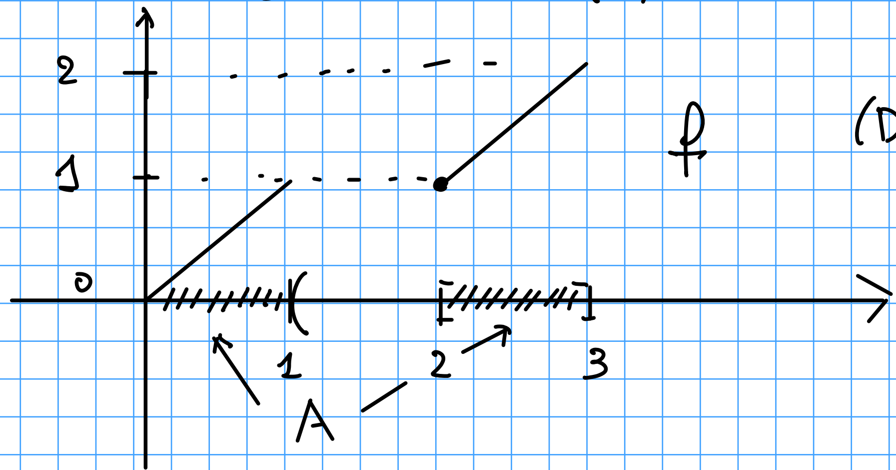
$$\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \lim_{x\to x_0} \left[\cos(x-x_0)\cos(x_0) - \sin(x-x_0)\sin(x_0)\right] = \cos(x_0)$$

RIMANE IL PROBLEMA DELLE FUNZIONI INVERSE

(RADICI / LOGARITMI / ARCSIN ...)

IL TEOREMA "INGENUO": f CONTINUA $\Rightarrow$ f^{-1} CONTINUA

PUÒ ESSERE FALSO:

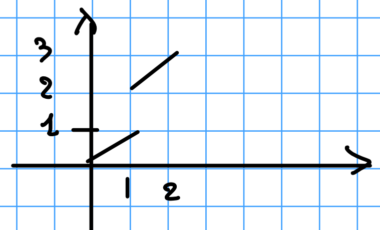


(DEFINITA SU $\overbrace{[0,1[\cup [2,3]}^{A}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

f è CONTINUA e BIGETTIVA DA $A \to [0,2]$

MA $f^{-1} : [0,2] \to A$ è DISCONTINUA IN $y=1$



$$\lim_{y\to 1^-} f^{-1}(y) = 1 \qquad \lim_{y\to 1^+} f^{-1}(y) = 2$$

Il fatto che questo teorema non sia vero (scritto così) è importante quando si passa in più variabili . . . (*)

TEOREMA Se $f : I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO (!!)

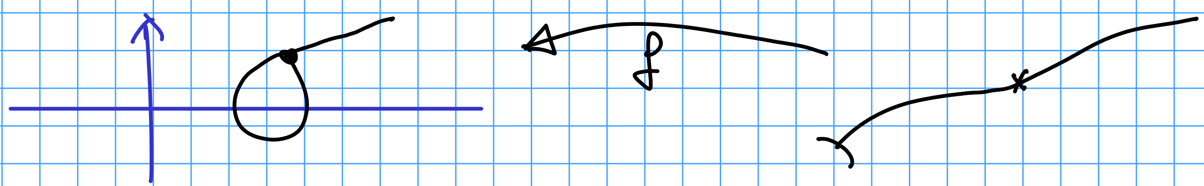
f CONTINUA E INIETTIVA $\Longrightarrow$

- $f(I)$ $(=: J)$ è un intervallo
- $f^{-1} : J \to I$ è continua

Il motivo per cui il teorema vale è che sia f che f^{-1} devono essere strettamente monotone (per essere continue e iniettive su un intervallo). (LO VEDIAMO PIÙ AVANTI)

CONSEGUENZE DEL TEOREMA Le funzioni inverse delle funzioni "elementari": $\ln(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\sqrt[m]{x}$ . . . sono tutte continue.

(*) SE MI METTO IN $\mathbb{R}^2$



f è continua (f "incolla") ma f^{-1} è discontinua (f^{-1} "strappa")

ALCUNI TEOREMI "FONDAMENTALI" RIGUARDANTI LE FUNZIONI CONTINUE SU UN INTERVALLO

(1) Teorema (degli zeri) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e se $f(a)<0$ e $f(b)>0$ (o viceversa) $\Longrightarrow \exists\, x\in\,]a,b[$ tale che

$$f(x)=0$$

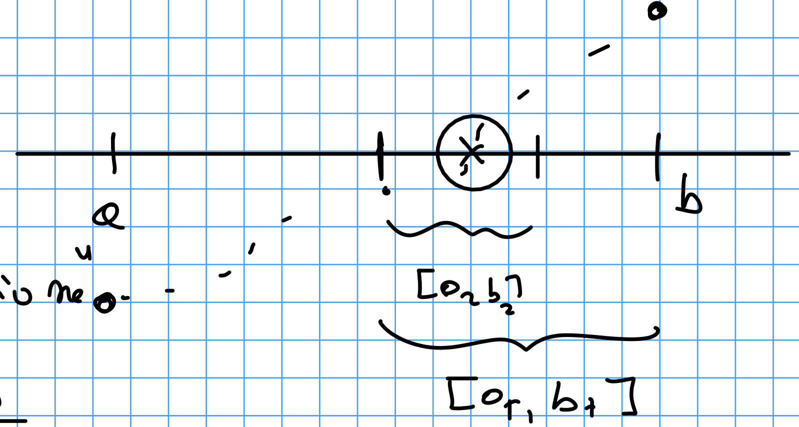
(da questo seguirà il teorema sulla continuità di f^{-1})

(2) Teorema (di Weierstrass) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua $\Longrightarrow$ esistono x_1 e x_2 in $[a,b]$ tali che

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2) \quad \forall x\in[a,b]$$

f ha massimo e minimo in $[a,b]$: x_1 e x_2 si dicono "punti di max / min" mentre $f(x_1)$ è il minimo / $f(x_2)$ è il massimo di f su $[a,b]$

DIM. (del Teorema degli zeri)



Usiamo una tecnica di "bisezione"...

PASSO 1   Prendo $c = \frac{a+b}{2}$

SE $f(c) = 0$ IL TEOREMA È DIMOSTRATO

SE $f(c) > 0$ chiamo $a_1 := a$, $b_1 := c$

SE $f(c) < 0$ chiamo $a_1 := c$, $b_1 := b$

Se $f(c) \neq$ mi sono ricondotto a un intervallo $[a_1, b_1]$ tale che $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, $[a_1, b_1] \subset [a, b]$

e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

PASSO 2   prendo $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{}$

se $f(c_1) = 0$ FINE

se $f(c_1) > 0$ $a_2 := a_1$ $b_2 := c_1$

se $f(c_1) < 0$ $a_2 := c_1$ $b_2 := b_1$

ITERO IL RAGIONAMENTO: PUÒ SUCCEDERE CHE DOPO K suddivisioni trovo un c_K con $f(c_K) = 0$ (FINE)

SE NO COSTRUISCO DUE SUCCESSIONI $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ TALI

$$\left[\begin{array}{ll} (1) \quad a_n \leq b_n & (2) \quad [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \\ & \quad (a = a_0,\ b = b_0) \\ (3) \quad f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0, & (4) \quad b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \end{array}\right]$$

- Per la (2) $\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente

Tali successioni si trovano in $[a, b]$ $\Rightarrow$ sono limitate

PER IL TEOREMA SULLE SUCC. MONOTONE esse hanno limite finito:

$$a_n \longrightarrow \alpha \qquad b_n \longrightarrow \beta$$

PER (1) $\Rightarrow$ $\alpha \leq \beta$

DALLA (4) $\Rightarrow$ $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Dato che $\dfrac{1}{2^n} \to 0$

ottengo $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

DUNQUE $\boxed{\alpha = \beta}$ $\leftarrow$ lo chiamo x, cioè $a_n \to x$, $b_n \to x$

DIMOSTRIAMO CHE $f(x) = 0$. DALLA (3) HO

$f(a_n) < 0$. DATO CHE $a_n \to x$ e DATO CHE f È CONTINUA IN x OTTENGO

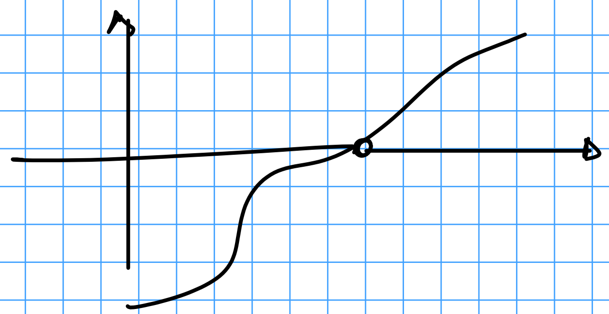
$f(a_n) \to f(x)$. PER I TEOREMI SUI LIMITI

$f(x) \leq 0$

RAGIONANDO SU b_n trovo analogamente

$f(b_n) > 0$, $f(b_n) \to f(x) \Rightarrow f(x) \geq 0$

NON PUÒ ESSERE ALTRO CHE $\boxed{f(x) = 0}$



GENERALIZZAZIONE

<u>Teorema</u> (dei valori intermedi) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

$y \in \mathbb{R}$. Se $f(a) < y$ $f(b) > y$ (o viceversa) $\Longrightarrow$

$\exists\ x \in\ ]a,b[$ tale che $f(x) = y$.

y rappresenta un VALORE compreso tra $f(a)$ e $f(b)$

Il teorema dice che ogni VALORE compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ è ASSUNTO (cioè c'è una x in cui $f(x) = y$)

<u>TIPICAMENTE SI DICE</u>: f continua ASSUME TUTTI I VALORI TRA $f(a)$ e $f(b)$