Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quattordicesima lezione, 12 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Teorema (CAMBIO DI VARIABILE NEI LIMITI)

Supponiamo di avere (1) $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di estremi a, b

$a \leq x_0 \leq b$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}^*$

(2) $g : J \to \mathbb{R}$ J intervallo di estremi a_1, b_1

$a_1 \leq y_0 \leq b_1$ tale che $\lim_{y \to y_0} g(y) = x_0$

(3) $g(y) \neq x_0$ per y vicino a y_0

ALLORA $\lim_{y \to y_0} f(g(y)) = \ell \quad \left(= \lim_{x \to x_0} f(x) \right)$

IDEA: Se devo fare $\lim_{x \to x_0} f(x)$ posso "fare il cambio di variabile $x = g(y)$, DEVO TROVARE y_0 in modo che

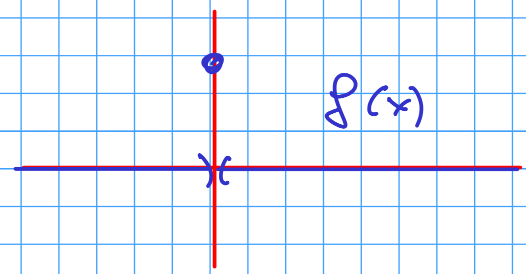
$\lim_{y \to y_0} g(y) = y_0$. Allora il limite che cerco diventa

$$\lim_{y \to y_0} f(g(y))$$

$(g(y) \neq y_0)$

SENZA L'IPOTESI (3) il teorema è falso: per esempio

$$f(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\lim_{y \to 0} g(y) = 0$$

MA $\lim_{y \to 0} f(g(y)) = 1 \neq 0$

DI FATTO LA (3) VALE NEI CASI CHE SI INCONTRANO DI SOLITO

<u>DIM</u>. (del teorema) Per def. ("successionale") di

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \{x_n\}$ in I tale che $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ SI HA $f(x_n) \to \ell$

(b) Per motivo analogo:

$\forall \{y_n\}$ in J $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$ si HA $g(y_n) \to x_0$

(b') per la (3) trovo che $\forall \{y_n\}$ in J $y_n \neq y_0$ $y_n \to y_0$ si HA

$$g(y_n) \to x_0, \quad g(y_n) \neq x_0$$

METTENDO INSIEME (b') e (2) trovo che

$$\forall \{y_n\}, \ y_n \in J \ \ y_n \neq y_0 \ \Rightarrow \ f(g(y_n)) \longrightarrow \ell$$

HO DUNQUE VERIFICATO CHE $\lim_{y \to y_0} f(g(y)) = \ell$.

OSS. (cfr. quello sopra) Si può anche vedere il teorema come un cambio di variabile "nell'altro senso", cioè

PARTENDO DA $\lim_{y \to y_0} f(g(y))$ PONGO $x = g(y)$

CHIAMO $x_0 = \lim_{y \to y_0} g(y)$ e allora (se vale (3))

posso passare a $\lim_{x \to x_0} f(x)$

ESEMPI

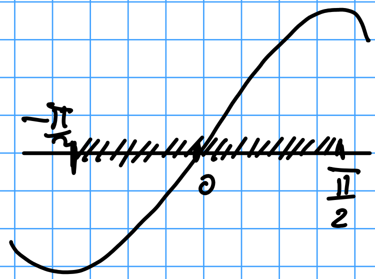
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = ?$$

posso fare il cambio di variabile $t = 3x$. $(x = t/3)$

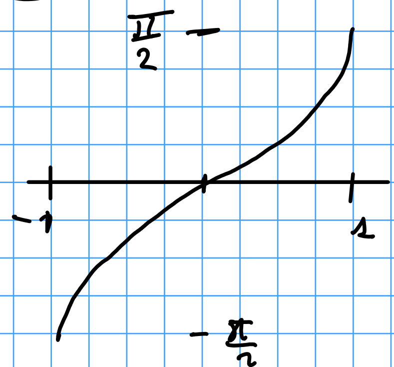
Se $x \to 0 \Rightarrow t = 3x \to 0$. DUNQUE IL LIMITE DIVENTA

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot 3 = 3 \cdot 1 = 3$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$$



$y = \sin(x)$



$y = \arcsin(x)$ = INVERSA di $\sin(x)\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

prendo $t = \arcsin(x)$
$(\sin(t) = x)$

DIAMO PER BUONO CHE

$$\lim_{x \to 0} \arcsin(x) = 0$$

$\Rightarrow$ il limite diventa

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin(t)} = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$$

cambio di variabile $t = \arctan(x)$
$(\tan(t) = x)$

e, dato che $\lim_{x\to 0} \arctan(x) = 0$, posso e

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan(t)} = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{\frac{1}{x}}$$ (2 MODI - SIMILI)

I°) $$\left(1+\sin(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x}} =$$

$$\left[\left(1+\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin(x)}}\right]^{\frac{\sin(x)}{x}}$$

GUARDIAMO LA $[\cdot]$ ← cambio di variabile $t = \sin(x)$

Se $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$, posso e $\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

Se torno al limite completo vedo che è del tipo

$$f(x)^{g(x)} \quad \text{dove} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = e \quad e \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \left(\quad \right) = e^{1} = e$$

II°) Prendiamo il logaritmo: TROVO

$$\frac{\ln(1+\sin(x))}{x} = \frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x}$$

$\frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} \to 1$ (cambio di var. $t = \sin(x)$ + $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$)

$\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ (Lo so!)

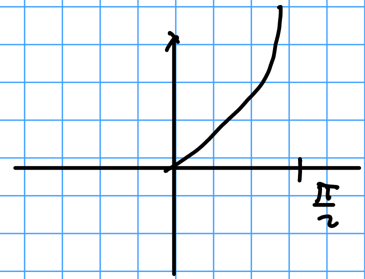
DUNQUE $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} = 1$

FACENDO L'ESPONENZIALE $\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}} = e^{1} = e$

TECNICA STANDARD: scrivere $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) \cdot (2x - \pi)$

$\tan(x) \to +\infty$, $\quad (2x-\pi) \to 0$



VOGLIO RICONDURMI A UN LIMITE IN ZERO

PRENDO $t = x - \frac{\pi}{2}$ $\quad \left(\text{se } x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to 0 \right)$

DUNQUE $x = t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\tan(x) = \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(t+\pi/2)}{\cos(t+\pi/2)} = \frac{\sin(t)\cos(\pi/2) + \cos(t)\sin(\pi/2)}{\cos(t)\cos(\pi/2) - \sin(t)\sin(\pi/2)}$$

$$= -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} = -\frac{1}{\tan(t)}$$

Allora il limite diventa $\lim_{t \to 0} \frac{2t}{-\tan(t)} = -2$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Vediamo più in generale

$\lim_{x \to 0} \frac{A^x - 1}{x}$ $\quad A > 0$

CONVIENE SCRIVERE $A^x = e^{x \ln(A)} \Rightarrow$

$$\frac{A^x - 1}{x} = \frac{e^{\ln(A)\cdot x} - 1}{x} = \underbrace{\frac{e^{\ln(A)\cdot x} - 1}{\ln(A)\cdot x}}_{t = \ln(A)\cdot x} \cdot \ln(A)$$

$\downarrow x \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{A^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \ln(A) = \boxed{\ln(A)}$$

- PROVARE A FARE $\lim_{x\to 0} \frac{\log_A(1+x)}{x} = ??$

- ALTRI LIMITI "NOTEVOLI"

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{se } A > 1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

PER VEDERLO DEVO DIMOSTRARE CHE $\forall \{x_n\}$ succ. in $\mathbb{R}$ con $x_n \to +\infty$ SI HA $\boxed{\frac{A^{x_n}}{x_n^\alpha} \to +\infty}$

Per fare questo possiamo notare che

(CASO $\alpha > 0$ - se no è più facile

$$(*) \quad \frac{A^{x_n}}{x_n^{\alpha}} \geq \frac{A^{[x_n]}}{([x_n]+1)^{\alpha}} = \frac{1}{A}\,\frac{A^{[x_n]+1}}{([x_n]+1)^{\alpha}}$$

NOTO CHE $\sigma_n := [x_n]+1$ è una succ. di interi, $\sigma_n \to +\infty$.

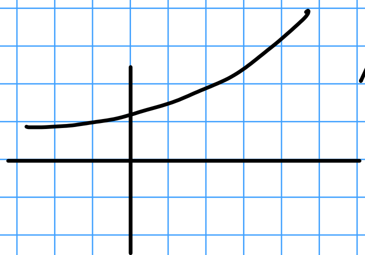
MA LO SO CHE $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n^{\alpha}} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{A^{\sigma_n}}{(\sigma_n)^{\alpha}} = +\infty$

PER LA DISUGUAGLIANZA $(*)$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{A^{x_n}}{x_n^{\alpha}} = +\infty$

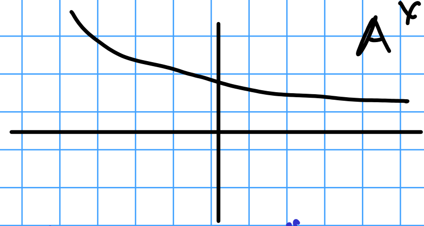
IN MODO SIMILE RICAVO ($\underline{\alpha > 0}$ - se no è + FACILE)

o $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{A^x}{x^{\alpha}} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} x^{\alpha} A^x = 0 \quad (A>1)$

oo $\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} A^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{A^x}{x^{\alpha}} = +\infty \quad (0<A<1)$



A^x se $A>1$



A^x se $A<1$

L'ESPONENZIALE (se $x\to\pm\infty$) "VINCE" su ogni POTENZA

$A > 1 \qquad \alpha > 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_A(x)}{x^\alpha} = 0^+ \,, \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_A(x) = 0^-}$$

Questi limiti si ricavano dai precedenti usando $t = \log_A(x)$
$(A^t = x)$

$\Rightarrow$ (vedo il primo dei due) $\qquad x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

PASSO A $\quad \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(A^t)^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \Big[\underbrace{\frac{t^{1/\alpha}}{A^t}}_{\downarrow\, 0} \Big]^\alpha = 0^\alpha = 0$

Il secondo si fa nello stesso modo: $\quad t = \log_A(x) \leftrightarrow x = A^t$

se $x \to 0 \Rightarrow t \to -\infty \qquad$ PASSO A

$$\lim_{t\to-\infty} (A^t)^\alpha\, t = \lim_{t\to-\infty} \Big[\underbrace{A^t\, t^{1/\alpha}}_{\downarrow} \Big]^\alpha = 0^\alpha = 0$$

IL logaritmo "PERDE" di fronte a una qualunque potenza

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{2x - 4} \qquad \left(\frac{0}{0} \;!! \right)$$

se metto $t = x-2$ mi riconduco a un limite in zero:

$\lim_{x\to 2} x-2=0$! $\quad (x=t+2)$ PASSO A

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+2}-e^{2}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}e^{2}-e^{2}}{2t} = \frac{e^2}{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = \frac{e^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\frac{x^2}{\sin^2(x)} =$$ (se i limiti esistono ..)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 =$$

$(t=x^2)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 = 1\cdot(1)^2 = 1$$

PAUSA

ESEMPIO DI NON ESISTENZA PER IL LIMITE

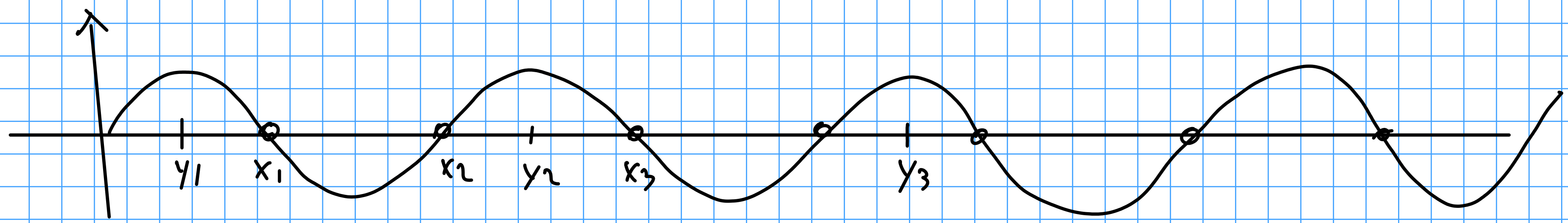
• $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ NON ESISTE (MOLTO PIÙ FACILE RISPETTO A $\lim_{n\to\infty} \sin(n)$ NON ESISTE)

$\uparrow$

BASTA TROVARE DUE SUCCESSIONI $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tali che

$x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ ma

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = l_1 \neq l_2 = \lim_{n\to\infty} \sin(y_n)$$



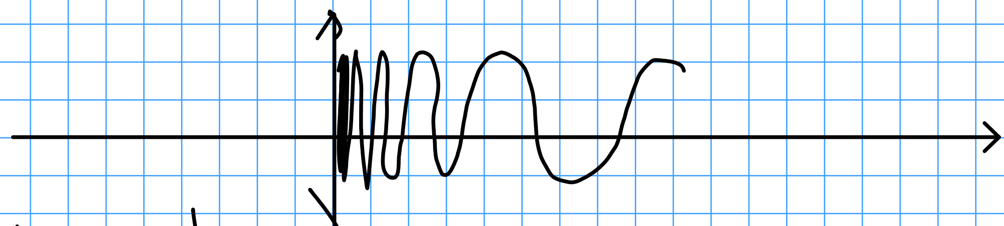
Posso prendere $x_n = n\pi \Rightarrow \sin(x_n) = 0 \Rightarrow \sin(x_n) \to 0$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Rightarrow \sin(y_n) = 1 \Rightarrow \sin(y_n) \to 1 \neq 0$

• IN MODO SIMILE SI VEDE CHE NON ESISTE

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\left(x_n = \frac{1}{n\pi},\ y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}\right)$



ES. $\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x\left[\ln(x^2+2x+2) - \ln(x^2-3x+1)\right]}_{\star}$

scrivo

$$\star = x \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2-3x+1}$$

VEDO CHE $\frac{x^2+2x+2}{x^2-3x+1} = \frac{1+2/x+2/x^2}{1-3/x+1/x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$

$\Rightarrow \ln(\ldots) \to \ln(1) = 0$

FORMA INDETERMINATA $0 \cdot \infty$

- SCRIVO L'ARGOMENTO del logaritmo COME 1 + INFINITESIMO

$$\frac{x^2+2x+2}{x^2-3x+1} = 1 + \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-3x+1} - 1\right) = 1 + \underbrace{\frac{5x+1}{x^2-3x+1}}_{\text{INFINITESIMO}}$$

$$\Rightarrow (\star) = \frac{\ln\left(1+\frac{5x+1}{x^2-3x+1}\right)}{\frac{5x+1}{x^2-3x+1}} \cdot \underbrace{\frac{(5x+1)x}{x^2-3x+1}}$$

prendo $t = \frac{5x+1}{x^2-3x+1}$

$\downarrow$ se $x \to +\infty$

5

dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+1}{x^2-3x+1} = 0 \Rightarrow t \to 0$ e il

primo fattore diventa

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

ALLA FINE $\lim_{x\to+\infty} (*) = 1 \cdot 5 = 5$

ORDINI DI INFINITESIMO NEL CASO DEI LIMITI DI FUNZIONE

FISSO UN PUNTO x_0 (in $\mathbb{R}^*$) (TIPICAMENTE $x_0 = 0$)

DEF. DUE FUNZIONI $f(x)$ e $g(x)$ (definite vicino x_0)

si dicono ASINTOTICHE per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

(scrivo allora $f(x) \simeq g(x)$)

A RIGORE DEVO CHIEDERE $g(x) \neq 0$ per x vicino a x_0.

SE NO POTREI DIRE CHE $f(x) \simeq g(x)$

quando $f(x) = h(x)\, g(x)$ per una opportuna $h(x)$ tale che $\lim_{x \to x_0} h(x) = 1$

ALLORA $f(x) \simeq g(x) \iff g(x) \simeq f(x)$

(DI SOLITO SI CONSIDERANO $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$)

DEF. (ordini superiori e $o(\cdot)$)

- $f(x)$ ha ordine di infinitesimo maggiore di $g(x)$ (per $x \to x_0$) se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\left(\text{o } f(x) = g(x)\, h(x) \text{ con } \lim_{x \to x_0} h(x) = 0 \right)$

- pongo $o(g) = \{ \text{tutte le } f(x) \text{ tali che } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \}$

TIPICAMENTE SCRIVO $f = o(g)$ (INVECE DI $f \in o(g)$) per indicare che f ha ordine di infinitesimo maggiore di g.

DEF. Chiamo

$O(g) = \{$ tutte le funzioni $f(x)$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ è limitata vicino a $x_0\}$

(per esempio $\sin(x) = O(1)$ $(x \to 0)$)

Anche qui scriverò $f = O(g)$ invece di $f \in O(g)$

PROPRIETÀ

(a) $f \simeq g \Rightarrow f = O(g)$

(b) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

(c) $f \simeq g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Leftrightarrow g = f + o(f)$

(d1) $o(f) + o(f) = o(f)$ [se $h_1 \in o(f)$ e $h_2 \in o(f) \Rightarrow h_1 + h_2 \in o(f)$]

(d2) $o(f) + O(f) = O(f)$ [se $h_1 = o(f)$, $h_2 = O(f) \Rightarrow h_1 + h_2 \in O(f)$]

(d3) $O(f) + O(f) = O(f)$

(e1) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$ [se $h_1 \in o(f)$, $h_2 \in o(g) \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in o(f \cdot g)$]

(e2) $\quad o(f)\,O(g) = o(f\cdot g) \quad [$se $h_1 \in o(f),\ h_2 \in O(g) \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in o(f\cdot g)\ ]$

(e3) $\quad O(f)\,O(g) = O(f\cdot g)$

(f) $\quad o(\underbrace{f + o(f)}_{g}) = o(f) \quad [$ se $g = f + o(f)$ e se $h = o(g)$

$\Rightarrow h = o(f)\ ]$

(f') $\quad$ se $f \simeq g \Rightarrow o(f) = o(g)$

(f*) $\quad O(f + o(f)) = O(f)$ oppure se $f \simeq g$ $O(f) = O(g)$

DIMOSTRIAMONE UNA: (la (f))

$$o(f + o(f)) = o(f)$$

<u>cioè</u> se $\underbrace{g = f + o(f)}_{g = f + f_1 \text{ con } \frac{f_1(x)}{f(x)} \to 0 \quad (x \to x_0)}$ e $h = o(g) \Rightarrow h = o(f)$

ALLORA

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{h(x)}{g(x)} \frac{f(x)+f_1(x)}{f(x)} =$$

$$\frac{h(x)}{g(x)}\left(1+\frac{f_1(x)}{f(x)}\right) \longrightarrow 0$$

perché

$$\frac{h(x)}{g(x)} \to 0 \qquad (h = o(g))$$

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$h = o(f)$$

RIFACCIAMO IL LIMITE:

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2-3x+1} = \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{5x+1}{x^2-3x+1}\right)$$

so che $\frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1 \iff \ln(1+y) \simeq y \quad (y\to 0)$

$$\iff \boxed{\ln(1+y) = y + o(y) \qquad (y\to 0)}$$

Se uso la relazione sopra con $y = \frac{5x+1}{x^2-3x+1}$ trovo

(vedi ✱✱ con $k=1$)

$$x \ln\left(1+\frac{5x+1}{x^2-3x+1}\right) = x\left[\frac{5x+1}{x^2-3x+1} + o\left(\frac{5x+1}{x^2-3x+1}\right)\right] = (x\to+\infty)$$

$$\frac{x(5x+1)}{x^2-3x+1} + o\Bigg(\underbrace{\frac{x(5x+1)}{x^2-3x+1}}_{\text{tende a } 5}\Bigg) = \frac{x(5x+1)}{x^2-3x+1} + o(5) \to 5$$

GLI o PICCOLI SPARISCONO <u>SOLO</u> alla fine.

FATTO

Se $f(y) = o(y^k)$ per $y \to 0$

e se $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow$

$$f(g(x)) = o\left(g(x)^k\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x\left[\ln\left(4+2^x+3^x\right) - \ln\left(1+2^x+3^x\right)\right]$$

$$2^x\left[\ln\left(4+2^x+3^x\right) - \ln\left(1+2^x+3^x\right)\right] =$$

$$2^x \ln \underbrace{\frac{4+2^x+3^x}{1+2^x+3^x}} = 2^x \ln\left(1+\underbrace{\frac{3}{1+2^x+3^x}}_{\text{tende a zero}}\right) =$$

$$\frac{4+2^x+3^x}{1+2^x+3^x} = \frac{3^x}{3^x}\,\frac{4\cdot 3^{-x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}{3^{-x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x+1} \longrightarrow 1$$

(uso $y=\dfrac{3}{1+2^x+3^x}$ nella formula $\ln(1+y)=y+o(y)$, $y\to 0$)

$$2^x\left(\frac{3}{1+2^x+3^x}+o\left(\frac{3}{1+2^x+3^x}\right)\right) \qquad (x\to+\infty)$$

$$= \frac{3\,2^x}{1+2^x+3^x} + o\left(\frac{3\cdot 2^x}{1+2^x+3^x}\right) \longrightarrow 0$$

$$\frac{2^x}{3^x}\,\frac{3}{1+o(1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^x(1+o(1)) \longrightarrow 0$$

<u>Teorema</u> (sostituzione degli infinitesimi) (COME PER LE SUCCESSIONI)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f+o(f)}{g+o(g)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}$$