Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Tredicesima lezione, 11 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

LIMITI DI FUNZIONI

2 DEFINIZIONI (EQUIVALENTI)
- TRAMITE LE SUCCESSIONI
- TRAMITE GLI INTORNI (TRADIZIONALE)

Def. (intorno) Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ chiamo INTORNO DI x_0 un qualunque intervallo di estremi a, b con $a < x_0 < b$ ← (DIS. STRETTE)

  $I = [a, b] \;/\;]a, b] \;/\;]a, b[\;/\;]a, b]$

  I contiene x_0 "ben dentro di lui"

- Se $x_0 = +\infty$ chiamo INTORNO di x_0 una qualunque semiretta $[a, +\infty[$ o $]a, +\infty[$ con $a \in \mathbb{R}$

- Se $x_0 = -\infty$ chiamo INTORNO di x_0 una qualunque semiretta $]-\infty, b]$ o $]-\infty, b[$ con $b \in \mathbb{R}$.

D'ORA IN POI prendo una funzione f definita su un intervallo I eccetto un punto x_0, DOVE

I ha estremi $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $a \leq x_0 \leq b$
(NON E' DETTO CHE I contenga gli estremi)

(per esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita in $\underset{I}{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ e posso considerare $x_0 = 0$;

oppure $f(x) = x$, $I = \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$)

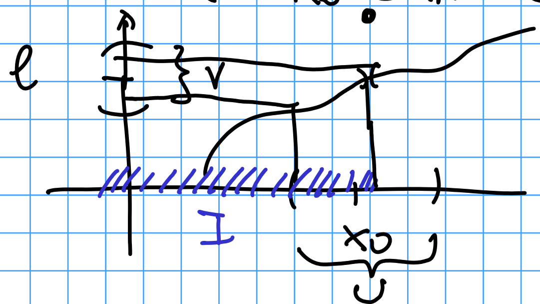
<u>DEFINIZIONE DI LIMITE</u> Dato $l \in [-\infty, +\infty]$ dico che l è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0, e scrivo

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

SE per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che $\forall x \in U$ con $x \in I$, $\underline{\underline{x \neq x_0}}$ $\Rightarrow f(x) \in V$

(NON CONTA QUANTO FA $f(x_0)$ — AMMESSO CHE $x_0 \in I$)

IDEA GRAFICA se $x_0 \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{R}$



INTRODUCIAMO L'ESPRESSIONE "per x vicino a x_0":

DICO CHE UNA PROPRIETÀ $P(x)$ vale "per x vicino a x_0"

se esiste un intorno U di x_0 tale che

$$P(x) \text{ è vera } \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\} \quad (\forall x \in U \text{ con } x \neq x_0)$$

(Se però $P(x)$ ha senso solo per le x di intervallo I, dico che $P(x)$ vale per x vicino a x_0 se

$$P(x) \text{ è vera } \quad \forall x \in U, \; x \in I, \; x \neq x_0 \;)$$

<u>NOTA</u> $P(n)$ "vera definitivamente" corrisponde a

$P(n)$ "vera per x vicino a $+\infty$"

CON QUESTE ESPRESSIONI LA DEF. DI LIMITE DIVENTA

(*) Per ogni intorno V di ℓ si ha $f(x) \in V$ per x vicino a x_0

o (IN MODO ANCORA PIÙ CONCISO)

$$f(x) \text{ è vicina a } \ell \text{ per } x \text{ vicino a } x_0$$

SI POTREBBERO ESAMINARE NEL DETTAGLIO I VARI CASI CHE SI POSSONO PRESENTARE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con $x_0, \ell \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty / -\infty$ $x_0 \in \mathbb{R}$ ($\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ tale che se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ $x \neq x_0$ $x \in I \Rightarrow f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ $(x \to -\infty)$ con $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty / -\infty$ $(x \to -\infty)$

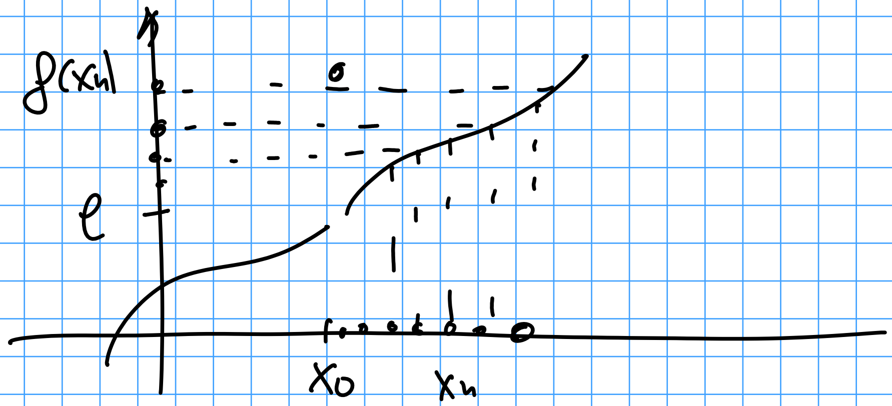
ALTERNATIVAMENTE

DEFINIZIONE (per successioni) DI LIMITE x_0, f come prima $\ell \in [-\infty, +\infty]$.

Dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se:

PER OGNI SUCCESSIONE $\{x_n\}$ di punti di I con $x \neq x_0$ e con $x_n \to x_0$ SI HA $f(x_n) \to \ell$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$$



f trasforma successioni che tendono a x_0 ($\underline{x_n \subset I \setminus \{x_0\}}$) in successioni che tendono a ℓ

TEOREMA Le due definizioni sono equivalenti, cioè

$$\ell = \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ NEL SENSO DEGLI INTORNI} \iff \ell = \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ NEL SENSO DELLE SUCCESSIONI}$$

(NON LO DIM.)

ESEMPIO $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ LA FUNZIONE HA SENSO SE $x \neq 0$

$I = \mathbb{R}$ $x_0 = 0$ e ha senso considerare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

QUESTO LIMITE ESISTE E FA 1 a causa del limite notevole visto per le successioni:

se $\forall$ $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$ $\left(\Longleftrightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 \right)$

per ogni !!

ANALOGAMENTE SI DEDUCE (VEDERE LEZIONI PRECEDENTI)

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad ; \quad \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(LIMITI NOTEVOLI DI FUNZIONE)

POI VEDIAMO ALTRI ESEMPI

VARI TEOREMI SUI LIMITI

UNICITÀ DEL LIMITE: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

$x_0 / \ell \in [-\infty, +\infty]$

Dim. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ so che $\forall \{x_n\}$ succ. in $I \setminus \{x_0\}$

con $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to \ell_1$.

. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$ so che $\forall \{x_n\}$ succ. in $I \setminus \{x_0\}$

con $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to \ell_2$.

PRENDO UNA succ. $\{x_n\}$ (a caso) che tende a $x_0 \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

a causa dell'unicità del limite di successione ($\{f(x_n)\}$)

LIMITI E OPERAZIONI Se ho due funzioni $f(x)$ e $g(x)$

definite in $I \setminus \{x_0\}$ e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell_1 + \ell_2$

$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ SE $\ell_2 \neq 0$

O ANCHE SE ℓ_1 / ℓ_2 sono infiniti purché abbia senso l'operazione su ℓ_1 / ℓ_2 come visto per le successioni

DEF. (limiti per eccesso o per difetto)

Scrivo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e (IN PIÙ)

(ℓ^-) $\qquad f(x) > \ell$ per x vicino a x_0

$\qquad (f(x) < \ell)$

(È INTERESSANTE SE $\ell \in \mathbb{R}$)

NON DA INTENDERSI COME SE FOSSERO NUMERI

<u>CON QUESTA DEF.</u> TROVO che " $\frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty$ "

Nel senso che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ (0^-) allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad (-\infty)$$

COME NEL CASO DELLE SUCC. CI SONO LE FORME INDETERMINATE $\quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad +\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty$

(anche qui non vanno intese come se fossero numeri!)

DIRE CHE $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata VUOLE DIRE

CHE se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ NON POSSO

DETERMINARE A PRIORI $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

PROPRIETÀ DEL LIMITE RISPETTO A "$\geq$"

<u>TEOR. PERMANENZA DEL SEGNO</u> Se $(\ell =) \lim_{x\to x_0} f(x) > m$

$\Rightarrow$ $f(x) > m$ per x vicino a x_0

$\left(\exists\ U \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in U, x \in I, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > m \right)$

(per x vicino a x_0)

<u>TEOR. CONFRONTO</u> Se $f(x) \geq g(x)$ $\forall$ x e

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ $\Rightarrow \ell_1 \geq \ell_2$

(Qui per la dim. servirebbe la def. mediante gli intorni)

<u>DUE CARABINIERI</u> Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

per x vicino a x_0 e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} h(x)$

$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

INOLTRE se $\ell = +\infty$ NON SERVE h
($\ell = -\infty$ NON SERVE f)

LIMITE DESTRO / LIMITE SINISTRO

Al solito $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di estremi a, b con $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Prendiamo x_0 con $a \le x_0 < b$ (per avvicinarci da dx)

<u>DEF.</u> (LIMITE DESTRO) Dico che $\ell \ (\in \mathbb{R}^*)$ è limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 da destra se $\forall \ V$ intorno di ℓ esiste U intorno di x_0 tale che se $x \in U$, $x \in I$, $\underbrace{x > x_0}_{*}$ $\Rightarrow$ $f(x) \in V$

(guardo solo i punti di U * A DESTRA DI x_0)

DEF (LIMITE SINISTRO) ANALOGA: devo prendere x_0 con $a < x_0 \leq b$ e sostituire $x > x_0$ con $x < x_0$ in (*)

ESEMPIO $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(VOLENDO POTREI DIRE CHE $f(0) = 0$ - MA NON CAMBIA NULLA)

è chiaro che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -1$

TEOREMA se $a < x_0 < b$ allora

existe $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff$ esistono $\ell^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$\ell^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

e sono uguali a ℓ

NOTA: NESSUNO DI QUESTI LIMITI ESISTE SEMPRE

OSS. POTREI DEFINIRE PER SUCCESSIONI I LIMITI DX e SX:

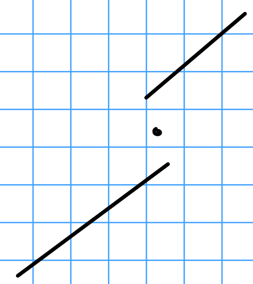
$\ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \iff \forall \{x_n\}$ in I con $x_n \to x_0^+ \Rightarrow f(x_n) \to \ell$

$$\ell = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \iff \forall \{x_n\} \text{ in } I \text{ con } x_n \to x_0^- \Rightarrow f(x_n) \to \ell$$

- POSSO ANCHE COMBINARE LE VARIE DEF. E DEFINIRE

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+$$ (e le altre tre possibilità ...)

Analogamente al caso delle successioni ho un teorema di esistenza del limite per funzioni monotone: LA SITUAZIONE È UN PO' PIÙ COMPLICATA



(Monotone ma $\nexists$ limite)

ESISTONO (SEPARATAMENTE) LIM. DX e LIM. SX.

<u>Def.</u> Dico che f (definita su un intervallo) è
- crescente se $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- strett. crescente se $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- decrescente $x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

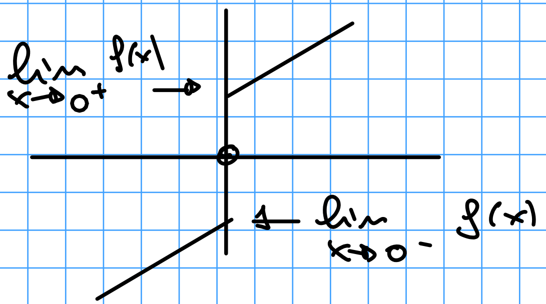
• strett. decrescente se $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$

IN OGNI CASO DICO CHE f È "MONOTONA"

<u>TEOREMA</u> $f: I \to \mathbb{R}$ (MONOTONA) CRESCENTE, I intervallo di estremi a, b con $-\infty \le a < b \le +\infty$.

• Se $x_0 \in [a, b[\ \Rightarrow \ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$

• Se $x_0 \in]a, b] \ \Rightarrow \ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$



NE SEGUE CHE, SE $x_0 \in I$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{(se esistono)}$$

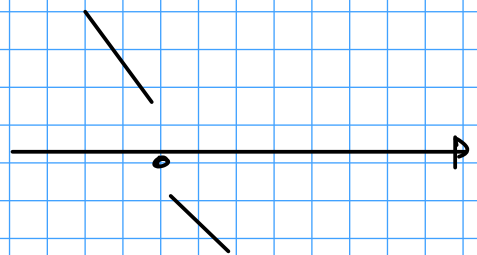
IN PARTICOLARE SE $a < x_0 < b$ tali limiti sono FINITI.

(se $a < x_0 < b$ c'è sempre un $x_1 < x_0$ e un $x_2 > x_0$ in I $\Rightarrow$ $f(x_1) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(x_2)$)

• I LIMITI POSSONO ESSERE $-\infty$ SE $x \to a^+$ o $+\infty$ se $x \to b^-$

• se $\exists$ limite $\Rightarrow$ deve fare $f(x)$ ($a < x_0 < b$)

SE f è decrescente vale tutto pur di scambiare inf e sup.



DEF. (FUNZIONE CONTINUA). Data $f : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo. Sia $x_0 \in I$.

- Dico che f è "continua in x_0" se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Se f è continua in ogni x_0 di un sottoinsieme $J \subset I$ dico che f è "continua sull(l'insieme) J"
- Analogamente si può considerare il caso in cui $I =$ unione di intervalli:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ è definita su } \mathbb{R} \setminus \{0\} = \underbrace{]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}_{A}$$

Allora $f(x)$ è continua su A: Infatti per ogni $x_0 \neq 0$ $\frac{1}{x}$ è continua in x_0 dato che $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$

(CONSEGUENZA DEI TEOREMI SUI LIMITI)

NON HA SENSO CHIEDERSI SE $\frac{1}{x}$ SIA O MENO CONTINUA IN ZERO - HA SENSO DOMANDARSI SE SIA POSSIBILE ASSEGNARLE UN VALORE IN $x=0$ IN MODO DA RENDERLA CONTINUA (NON È POSSIBILE!)