Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Dodicesima lezione, 5 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

AVVISO: LUNEDÌ PROSSIMO (7/11) NON C'È RICEVIMENTO

Formalizzare i discorsi riguardanti il "circa eguale" tra successioni

<u>DEF.</u> Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Diremo che sono ASINTOTICHE se $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1}$

<u>oss.</u> Questa def. sta in piedi se $b_n \neq 0$ (definitivamente).

Si potrebbe dire più in generale che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche se esiste una $\{c_n\}$ tale che

$$a_n = c_n \cdot b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

Se $b_n \neq 0$ questa seconda def. è equivalente alla prima (che, di solito, è "quella buona")

Per esprimere il fatto che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche scriveremo

$$\boxed{a_n \simeq b_n}$$

<u>OSS</u> $a_n \simeq b_n \iff b_n \simeq a_n$ (se entrambe sono $\neq 0$)

<u>Teorema</u> Se $a_n \simeq c_n$, $b_n \simeq d_n$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n}$$

(dove si intende, SE ESISTE uno dei due limiti, esiste anche l'altro e sono uguali)

<u>DIM</u>. Mettiamo che $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \quad (\in [-\infty, +\infty])$

Allora

$$\frac{c_n}{d_n} = \underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{\to\, \ell} \cdot \frac{c_n/a_n \to 1 \quad (c_n \simeq a_n)}{d_n/b_n \to 1 \quad (d_n \simeq b_n)} \longrightarrow \ell$$

\#

Teorema Se $a_n \simeq c_n$ e $b_n \simeq d_n \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} c_n \, d_n$$

(basta notare che se $a_n \simeq c_n \Longrightarrow \frac{1}{a_n} \simeq \frac{1}{c_n}$)

ESEMPI . Se $P(x)$ è un polinomio di grado K :

$$P(x) = a\,x^K + \text{termini di grado} < K$$

allora $a_n = P(n) \simeq a\,n^K$; in effetti

$$\frac{P(n)}{a\,n^K} = \frac{a\,n^K}{a\,n^K} + \text{termini che tendono a zero} \longrightarrow 1$$

$$2n^2 + 3n + 5 \simeq 2n^2 \qquad \frac{2n^2+3n+5}{2n^2} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{n} + \frac{5}{2}\frac{1}{n^2} \to 1$$

PIÙ IN GENERALE LA COSA È VERA ANCHE CON POTENZE NON INTERE, PURCHÉ CI SIA UN "TERMINE DI GRADO MASSIMO"

$$a_n = \sqrt[3]{n^6+1} - \sqrt[2]{n^2 + 5} \simeq n^2$$

dato che $a_n = n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^6}} - \frac{1}{n}\sqrt[2]{1+\frac{5}{n^2}}\right) = n^2(1+\text{infinitesimi})$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{n^2} \to 1$$

RIASSUNTO: se due successioni sono asintotiche si possono sostituire l'una all'altra, quando compaiono in un RAPPORTO o in un PRODOTTO.

NON È VERO che sono equivalenti se ci sono delle somme o differenze:

$$n^2 + n \simeq n^2$$
$$n^2 + 1 \simeq n^2$$

MA $\overbrace{(n^2+n) - (n^2+1)}^{= n-1}$ NON È ASINTOTICA A $n^2 - n^2 = 0$

QUANDO "SI SEMPLIFICA" la parte principale possono contare dei termini di ordine inferiore

ESEMPIO

$$a_n = \sqrt{n^2+1} \simeq n$$

$$b_n = \sqrt{n^2+n} \simeq n$$

MA

$$b_n - a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2+1}\left(\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{1/2} - 1\right)$$

CONVIENE SCRIVERLO COME 1 + infinitesimo

$$= n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\left(\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{1/2} - 1\right) =$$

$$= \underbrace{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}_{\text{tende a } 1}\ \underbrace{\frac{\left(\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{1/2} - 1\right)}{\frac{n-1}{n^2+1}}}_{\text{TENDE A } \frac{1}{2}}\ \frac{n-1}{n^2+1} =$$

TENDE A $\frac{1}{2}$ dato che $\frac{(1+a_n)^{1/2}-1}{a_n} \to \frac{1}{2}$ se $a_n \to 0$.

$$\frac{n(n-1)}{n^2+1}\left(\text{qualcosa che} \to \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

che tutto tende a $\frac{1}{2}$. DUNQUE

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \simeq \frac{1}{2}$$

DEF. Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni con $b_n \neq 0$

DICO CHE $\{a_n\}$ HA ordine di infinitesimo maggiore di $\{b_n\}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

DICO CHE $\{a_n\}$ HA ordine di infinito maggiore di $\{b_n\}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

NON È NECESSARIO CHE $a_n \to 0$ (nella prima def.) o $a_n \to \infty$ (nella seconda), ANCHE SE QUESTO È IL CASO TIPICO

per esempio n ha ordine di infinitesimo $>$ di n^2

PER DIRE CHE $\{a_n\}$ ha ordine di inf. maggiore di $\{b_n\}$ SCRIVIAMO

$$a_n = o(b_n)$$

(a_n è un o piccolo di b_n)

ATTENZIONE: se scrivo $a_n = o(b_n)$ non uso un vero "=". In effetti $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

MA $\frac{1}{n^2} \neq \frac{1}{n^3}$

VOLENDO ESSERE RIGOROSO DOVREI DEFINIRE

$$o(b_n) = \left\{ \text{tutte le successioni } \{a_n\} \text{ tali che } \frac{a_n}{b_n} \to 0 \right\}$$

e scrivere $a_n \in o(b_n)$, quindi

$$\frac{1}{n^2} \in o\left(\frac{1}{n}\right) \quad e \quad \frac{1}{n^3} \in o\left(\frac{1}{n}\right).$$

TEOREMA (principio di sostituzione degli infinitesimi).

Se $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ sono successioni tali che

$$b_n = o(a_n) \quad e \quad d_n = o(c_n), \text{ allora}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + b_n}{c_n + d_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{c_n}$$

(posso "buttar via" gli o piccoli)

DIM. Basta osservare che $a_n + b_n \simeq a_n$ dato che

$$\frac{a_n + b_n}{a_n} = 1 + \underbrace{\frac{b_n}{a_n}}_{\to 0} \to 1 \quad \left(\text{e } c_n + d_n \simeq c_n\right).$$

ESEMPIO Se devo fare il limite di $\dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 - 5}$

posso passare a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2}$ perché

$$n + 1 = o\,(n^2)$$
$$-5 = o\,(n^2)$$

[SI POTREBBE FARE TUTTO IN TERMINE DI ORDINE DI INFINITO: si buttano via gli infiniti di ordine più basso]

OSS $a_n \simeq b_n$ equivale a $a_n = b_n + o\,(b_n)$

oppure a $b_n = a_n + o\,(a_n)$

dato che se $a_n \simeq b_n$ allora $\dfrac{a_n - b_n}{a_n} = 1 - \dfrac{b}{a_n} \to 0$

(e lo stesso $\dfrac{a_n - b_n}{b_n} \to 0$)

Questa osservazione mi dice che i limiti notevoli (visti...) si possono "reinterpretare" in termini di $o(\cdot)$:

DATA $\{a_n\}$ con $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0 \ \forall n$. ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1 \iff \ln(1+a_n) \simeq a_n \iff \ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1 \iff e^{a_n}-1 \simeq a_n \iff e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha \iff (1+a_n)^\alpha - 1 \simeq \alpha a_n \iff (1+a_n)^\alpha = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1 \iff \sin(a_n) \simeq a_n \iff \sin(a_n) = a_n + o(a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2} \iff 1-\cos(a_n) \simeq \frac{1}{2} a_n^2 \iff \cos(a_n) = 1 - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$$

li vedremo in modo più semplice

Prendiamo $a_n \to 0$. So CHE $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{2}$

cioè $\sqrt{1+a_n} = 1 + \frac{a_n}{2} + o(a_n)$ ← ⊛ (qui $a_n \to 0$)

Faccio un altro limite (PIÙ BRUTTO!!)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+a_n} - 1 - \frac{a_n}{2}\right)}{a_n^2}$$

VEDIAMO CHE ⊛ NON È SUFFICIENTE A CALCOLARE QUESTO LIMITE

In effetti se uso l'informazione ⊛ posso scrivere

$$\frac{\sqrt{1+a_n} - 1 - a_n/2}{a_n^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{a_n}{2}} + o(a_n) - \cancel{1} - \cancel{\frac{a_n}{2}}}{a_n^2} = \frac{o(a_n)}{a_n^2}$$

IO SO CHE $\frac{o(a_n)}{a_n} \to 0$ MA NON POSSO DIRE COSA FACCIA $\frac{o(a_n)}{a_n^2}$

se per esempio $a_n = \frac{1}{n}$, allora $b_n = \frac{1}{n^2}$ è $o(a_n)$

e $\frac{b_n}{a_n^2} = \frac{1/n^2}{1/n^2} \to 1$

MA ANCHE $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ MA $\frac{c_n}{a_n^2} = \sqrt{n} \to +\infty$

DUNQUE IL LIMITE PROPOSTO NON È FATTIBILE SAPENDO SOLO (*).

LO FACCIAMO "RAZIONALIZZANDO":

$$\frac{\sqrt{1+a_n}-1-\frac{a_n}{2}}{a_n^2}=\frac{1+a_n-\left(1+\frac{a_n}{2}\right)^2}{a_n^2\left(\sqrt{1+a_n}+1+\frac{a_n}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1+a_n-\left(1+a_n+a^2/4\right)}{a_n^2\left(\sqrt{1+a_n}+1+a_n/2\right)}=\frac{-\cancel{a_n^2}^{\,1}/4}{\cancel{a_n^2}_{\,1}\left(\sqrt{1+a_n}+1+a_n/2\right)}\rightarrow-\frac{1}{8}$$

DUNQUE $\frac{\sqrt{1+a_n}-1-\frac{a_n}{2}}{a_n^2}\rightarrow-\frac{1}{8}\iff$

$$\sqrt{1+a_n}-1-\frac{a_n}{2}\simeq-\frac{1}{8}a_n^2\iff$$

$$\sqrt{1+a_n}=1+\frac{a_n}{2}\underbrace{-\frac{1}{8}a_n^2+o(a_n^2)}_{o(a_n)}\qquad(**)$$

HO MIGLIORATO L'INFORMAZIONE (*)

$$\sqrt{1+a_n} = 1 + \frac{a_n}{2} + o(a_n)$$

TROVANDO CHE $o(a_n) = -\frac{1}{8}a_n^2 + o(a_n^2)$

ESEMPIO Calcoliamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt{n^4+n^2+1} - 2n^2 - 1\right) n^2$$

cercando di ricondurci a (**). PRIMA DI TUTTO SCRIVO

$$2\sqrt{n^4+n^2+1} - 2n^2 - 1 =$$ (ho raccolto un n^2)

$$2n^2\left(\left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}_{a_n}\right)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2n^2}\right) =$$ (provo a usare solo (*))

$$2n^2\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n^4}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n^2}}\right) =$$

$$2n^2\left(\frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\right) = 2n^2\left(\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2n^2\, o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui c'è di fatto $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

perché $o\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: DIRE CHE $\frac{\Theta_n}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} \to 0$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}=\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \\ \text{quindi } \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\simeq\frac{1}{n^2} \end{array}\right) \to$$

È LO STESSO DI $\frac{\Theta_n}{\frac{1}{n^2}} \to 0$

CIOÈ $n^2\Theta_n \to 0$

e perché $\frac{1}{n^4}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e quindi $\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

DUNQUE $\left(2\sqrt{n^4+n^2+1}-2n^2-1\right)n^2=2n^4\,o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ & NON SO COSA FA CIRCA

(se avessi $n^2\,o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$ tenderebbe a zero, in quanto $=\frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$

ma qui c'è $\frac{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^4}} \to$??)

DA CAPO USANDO (**)

$$\left(2\sqrt{n^4+n^2+1}-2n^2-1\right)=2n^2\left(\left(1+\overbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}^{\Theta_n}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2n^2}\right)=$$

$$2n^2\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n^4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^2\right)\cancel{-1}-\cancel{\frac{1}{2n^2}}\right)=$$

guardiamo $o\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^2\right)=o\left(\frac{1}{n^4}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)=o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

perché $\frac{1}{n^4}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2\simeq\frac{1}{n^4}$ [PRINCIPIO se $a_n\simeq b_n$ $o(a_n)=o(b_n)$]

$$o\left(\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^2\right)=o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

SVILUPPANDO IL RESTO

$$2n^2\left(\frac{1}{2n^4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^6}+\frac{1}{n^8}\right)+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)=$$

$o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ e butto dentro $o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$$2n^2\left(\frac{1}{2n^4}-\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)=n^2\left(\frac{3}{4}\frac{1}{n^4}+2o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

è ancora $o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

$$=\frac{3}{4}\frac{1}{n^2}+n^2o\left(\frac{1}{n^4}\right)=\frac{3}{4}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

SE MOLTIPLICO PER n^2 TROVO

$$\frac{3}{4} + \underbrace{n^2\, o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{tende a zero per def.}} \longrightarrow \frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{Il limite viene } \frac{3}{4}}$

OSS Potrei scrivere $n^2\, o\left(\frac{1}{n^2}\right) = o(1)$; se applico la definizione vedo che

$$o(1) = \left\{ a_n \text{ tali che } \frac{a_n}{1} \to 0 \right\} = \{ a_n : a_n \to 0 \}$$

FATTI GENERALI (si deducono dalla def. di $o(\cdot)$)

- Se $a_n \simeq b_n$ $\quad o(a_n) = o(b_n)$
- $o(a_n) + o(a_n) = o(a_n)$
- $b_n\, o(a_n) = o(b_n a_n)$

(Ne vedremo qualcun'altro più avanti!)

ESEMPIO Se $k \in \mathbb{R}$

$$\left(a_n + o(a_n) \right)^k = a_n^k \left(1 + \frac{o(a_n)}{a_n} \right)^k =$$

$$a_n^k (1+o(1))^k = a_n^k (1+o(1)) =$$

$$a_n^k + o(1)\, a_n^k = a_n^k + o(a_n^k)$$

OPPURE OSSERVO CHE $(a_n + o(a_n))^k \simeq a_n^k$

FACENDO IL QUOZIENTE $\dfrac{(a_n + o(a_n))^k}{a_n^k} = \left(1 + \dfrac{o(a_n)}{a_n}\right)^k \to 1$

QUALCHE ALTRO LIMITE (dalla lista)

(37) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^5)}{\ln(1+n^4)}$

$$\frac{\ln(1+n^5)}{\ln(1+n^4)} = \frac{\ln\left(n^5\left(1+1/n^5\right)\right)}{\ln\left(n^4\left(1+1/n^4\right)\right)} =$$

$$\frac{\ln(n^5) + \ln(1+1/n^5)}{\ln(n^4)+\ln(1+1/n^4)} = \frac{5\ln(n) + o(1)}{4\ln(n) + o(1)} =$$

PROPRIETÀ (transitività degli $o(\cdot)$ se $a_n = o(b_n)$, $b_n = o(c_n)$
$\Rightarrow a_n = o(c_n)$

DIM. $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \to 0$)

dato che $1 = o(n)$ posso scrivere

$$\frac{5\ln(n) + o(\ln(n))}{4\ln(n) + o(\ln(n))} \sim \frac{5}{4} \Rightarrow \text{IL LIMITE È } \frac{5}{4}$$

NATURALMENTE POSSO SCRIVERE

$$\frac{5\ln(n) + o(1)}{4\ln(n) + o(1)} = \frac{5\ln(n)}{4\ln(n)} \frac{1 + \frac{o(1)}{\ln(n)}}{1 + \frac{o(1)}{\ln(n)}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right) \to \frac{5}{4}$$

ATTENZIONE In questo caso il limite notevole

$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1$ NON C'ENTRA NULLA

dato che $a_n = n^5$ NON TENDE A ZERO

OSS. Se $a_n \simeq b_n$ NON È DETTO CHE

$$e^{a_n} \simeq e^{b_n}$$ (COSE $\neq$ PRODOTTI / QUOZIENTI NON VANNO NECESSARIAMENTE D'ACCORDO CON $\simeq$)

(TROVARE UN ESEMPIO PER LA PROSSIMA VOLTA!)

(38) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(1+n^4)}{\ln^4(1+n^2)}$$

$$\frac{\ln^2(1+n^4)}{\ln^4(1+n^2)} = \frac{\ln^2\left(n^4(1+o(1))\right)}{\ln^4\left(n^2(1+o(1))\right)} =$$

$$\frac{\left(4\ln(n)+\ln(1+o(1))\right)^2}{\left(2\ln(n)+\ln(1+o(1))\right)^4} = \frac{16\ln^2(n)\left(1+o(1)\right)^2}{16\ln^4(n)\left(1+o(1)\right)^4} =$$

$$\frac{1}{\ln^2(n)}\left(1+o(1)\right) \longrightarrow 0$$

$$\sqrt[n]{2^n+4^n} = \sqrt[n]{4^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)} = 4\sqrt[n]{1+o(1)}$$

$$\longrightarrow 4$$

O.K. . PIÙ COMPLICATO :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2^n+4^n}-4\right)2^n = ??$$

FACCIAMO UN CALCOLO PIÙ GENERALE CERCANDO DI CAPIRE A COSA È ASINTOTICA $\sqrt[n]{2^n+4^n}$

$$\sqrt[n]{2^n+4^n} = 4\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = 4\,e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} =$$

$$4\,e^{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n}+o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)} =$$

$$\boxed{\ln(1+a_n) = a_n + o(a_n)}$$

$$4\, e^{\underbrace{\frac{1}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right)}_{a_n}}$$

$$\left[\; b_n\, o(a_n) = o(b_n a_n) \;\right]$$

$$4\left[1 + \frac{1}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right) + o\left(\underbrace{\frac{1}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right)}_{\simeq \frac{1}{n2^n}}\right)\right]$$

$$\left[\; e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n) \;\right]$$

$$\left[\; \text{se} \quad a_n \simeq b_n \quad o(a_n) = o(b_n) \;\right]$$

$$= 4\left[1 + \frac{1}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right) + o\left(\frac{1}{n2^n}\right)\right] = 4\left[1 + \frac{1}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right)\right]$$

DUNQUE $\boxed{\sqrt[n]{2^n + 4^n} = 4 + \frac{4}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2^n+4^n} - 4\right) 2^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{4}{n2^n} + o\left(\frac{1}{n2^n}\right)\right) 2^n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n} + o\left(\frac{4}{n}\right)\right) = 0$$

USANDO LA FORMULA TROVATA SOPRA SI VEDE CHE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2^n+4^n}-4\right)n\,2^n = 4$$

---

(55) $$\lim_{n\to\infty} \ln\left(e^n+n^2+1\right)-n$$

$$\ln(e^n+n^2+1)-n = \ln\left(e^n\left(1+e^{-n}n^2+e^{-n}\right)\right)-n$$

$$= \underbrace{\cancel{\ln(e^n)}}_{n} + \ln\left(1+e^{-n}n^2+e^{-n}\right) - \cancel{n} \longrightarrow \ln(1)=0$$

PROVARE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln(e^n+n^2+1)-n\right)e^n = \,??$$