Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Undicesima lezione, 4 novembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Sottosuccessione (successione estratta)

DATA $\{a_n\}$ successione dico che una $\{b_n\}$ è estratta da $\{a_n\}$ se $b_n = a_{\sigma_n}$ dove $\sigma_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è (una selezione di indici) una successione strettamente crescente di interi.

PER ESEMPIO $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ è estratta di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (basta prendere $\sigma_n = n^2$)

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{n^2} \qquad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} \ldots$$

MENTRE $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ NON È ESTRATTA DA $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (è vero il contrario)

TEOREMA Se $\{a_n\}$ HA LIMITE ℓ ($\in [-\infty, +\infty]$) e se $\{b_n\}$ è un'estratta di $\{a_n\}$ $\Longrightarrow$ anche $\{b_n\}$ HA LIMITE ℓ.

In realtà conviene dimostrare un teorema leggermente più generale

TEOREMA (*) Se $a_n \to \ell$ e se $\sigma_n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_n \to +\infty \implies$

$$a_{\sigma_n} \to \ell$$

(La differenza rispetto al Teorema precedente è che non si chiede $\{\sigma_n\}$ strettamente crescente)

DIM. Facciamo il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Dire che $a_n \to \ell$ equivale a dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Dato che $\sigma_n \to +\infty$ definitivamente $\sigma_n \geq \bar{n}$

$(\exists n_1 : \forall n \geq n_1)$

Mettendo le due cose insieme $\implies \forall \varepsilon > 0$ definitivamente

$$\ell - \varepsilon < a_{\sigma_n} < \ell + \varepsilon$$

dunque $a_{\sigma_n} \to \ell$.

OSS. Se $\{\sigma_n\}$ è strettamente crescente $(\sigma_{n+1} > \sigma_n \ \forall n)$

$\Rightarrow \quad \sigma_n \geq n \quad \Rightarrow \quad \sigma_n \to +\infty$.

DUNQUE IL TEOREMA sulle estratte segue dal teorema A!.

POSSIBILE USO DI QUESTO TEOREMA: se una $\{a_n\}$ ha la proprietà di avere due estratte con limiti DIVERSI $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ NON HA LIMITE

ESEMPIO $\quad a_n = (-1)^n \quad (a_0 = 1, \ a_1 = -1, \ a_2 = 1, \ \dots)$

NON HA LIMITE dato che $a_{2n} = 1 \to 1$

SONO ESTRATTE DA $\{a_n\}$ considerando $\sigma_n = 2n \ / \ \sigma_n = 2n+1$ $\quad a_{2n+1} = -1 \to -1$

Questo esempio mostra che il teorema sulle sottosuccessioni NON è reversibile PERÒ

TEOREMA Se $\{\sigma^1_n\}$ e $\{\sigma^2_n\}$ sono due successioni strettamente crescenti di interi tali $a_{\sigma^1_n} \to \ell$, $a_{\sigma^2_n} \to \ell$

(LO STESSO ℓ !!), e x $\mathbb{N} = \{\sigma^1_k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\sigma^2_k, k \in \mathbb{N}\}$

(i valori delle due succ. $\{\sigma^1_n\}$ e $\{\sigma^2_n\}$ ESAURISCONO tutto $\mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow \quad a_n \to \ell$$

(NO DIM.)

Abbiamo già usato (x) quando abbiamo dim. che $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

con $\sigma_n = [a_n] \,/\, [a_n]+1$ (VEDI l'ultima lezione)

ESEMPIO $\quad a_n = \dfrac{n^2 - (-1)^n n + 1}{n^2 + 7}$. $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

- LO POSSO CALCOLARE NOTANDO CHE

$$a_{2n} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 7} \to 1$$

$$a_{2n+1} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 7} \to 1$$

SONO EGUALI . DUNQUE $a_n \to 1$

- POTEVO ANCHE FARE COSÌ : $\quad a_n = \dfrac{\cancel{n^2}^{\,1}}{\cancel{n^2}_{\,1}} \dfrac{\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{1 + 7/n^2}$

$\to 0$ Dato che $(-1)^n$ è limitata

TORNIAMO AI LIMITI "NOTEVOLI"

• $\boxed{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1}$ (da ricordare!!)

DIMOSTRIAMOLO MEDIANTE LA DEF. DI LIMITE.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, devo mostrare che, per n grande,

$$\underbrace{1-\varepsilon \leq \sqrt[n]{n}}_{\text{VERA } \forall n \geq 1} \leq 1+\varepsilon$$

devo dim quella di dx.

$\Longleftrightarrow$ per n grande $n \leq (1+\varepsilon)^n$

$\Longleftrightarrow$ per n grande $1 \leq \dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n}$

MA NOI ABBIAMO VISTO CHE $\lim_{n \to \infty} \dfrac{A^n}{n} = +\infty$ se $A > 1$

DUNQUE, se $\varepsilon > 0$ è fissato, $\lim_{n \to \infty} \dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n} = +\infty$

$\Longrightarrow$ (Teorema di confronto) definitivamente $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n} > 1$

FINE

SI POTEVA ANCHE DEDURLO DIRETTAMENTE DAI LIMITI GIÀ FATTI:

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln\left(n^{1/n}\right)} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}, \quad \text{DATO CHE}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} \to 0 \implies e^{\frac{\ln(n)}{n}} \to e^0 = \boxed{1}$$

ANALOGAMENTE $\sqrt[n]{n^k} \to 1^k = 1$

Limiti contenenti funzioni trigonometriche:

DIAMO PER BUONO: se $a_n \to e$

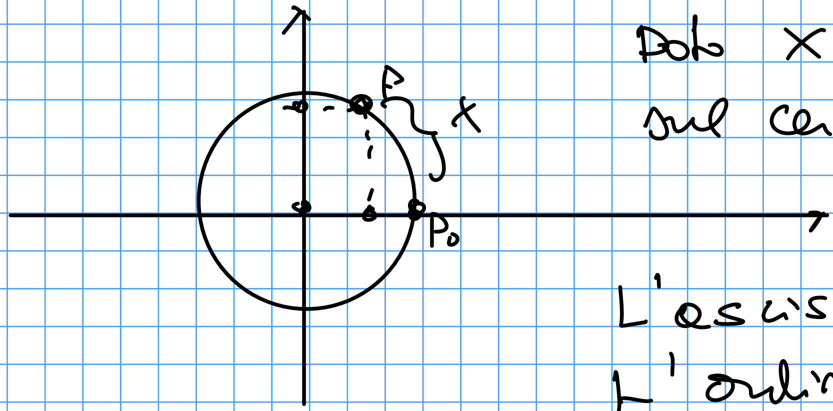
$\sin(a_n) \to \sin(e)$; $\cos(a_n) \to \cos(e)$

(lo vedremo più avanti - è intuitivo)

Sia $\{a_n\}$ che tende a zero: $a_n \to 0$, $a_n \neq 0 \; \forall n$

ALLORA $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1}$$

Faremo una dim. "per disegni" — per renderla rigorosa dovrei SPECIFICARE cosa intendo per $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(cosa che potremmo fare più avanti). PER ORA ci accontentiamo di un' IDEA GEOMETRICA:

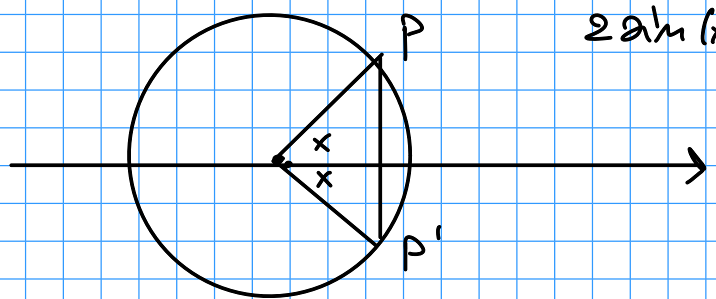


Dato $x \in \mathbb{R}$ prendo il PUNTO $P = P(x)$ sul cerchio unitario tale che l'arco tra $P_0 = (1,0)$ e P misuri x.

L'ascissa di $P(x)$ si chiama $\cos(x)$
L'ordinata di $P(x)$ si chiama $\sin(x)$

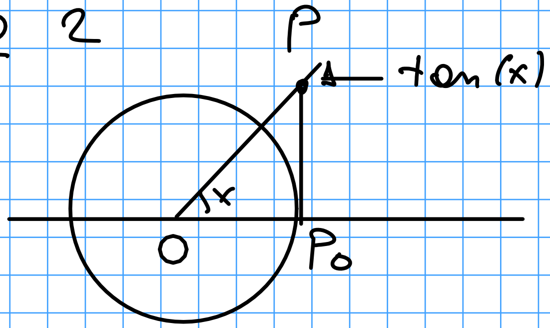
(SI PUÒ FORMALIZZARE)

FATTO 1 Se $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin(x) < x$



$2\sin(x) = \text{DISTANZA}(P', P) <$
$\text{ARCO}(P', P) = 2x$

FATTO 2



AREA (TRIANGOLO) $\geq$ AREA (SETTORE) $\quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\tan(x)}{2} \geq \frac{x}{2}$$

QUINDI

$$\sin(x) \geq x\cos(x) \quad \text{se} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

IN DEFINITIVA

$$x\cos(x) \leq \sin(x) \leq x \qquad \forall x \in \left]0, \pi/2\right[$$

$$\boxed{\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1} \qquad \forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\setminus \{0\}$$

$$\forall x \in \left]0, \pi/2\right[$$

Ma la disuguaglianza vale anche se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

(basta scrivere la dis. in $-x$ e notare che $\cos(-x) = \cos(x)$

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} \quad)$$

Allora se $a_n \to 0$ (e $a_n \neq 0$), definitivamente $|a_n| < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \cos(a_n) \leq \frac{\sin(a_n)}{a_n} \leq 1$$

Dato che $\cos(a_n) \to \cos(0) = 1 \Rightarrow$ (DUE CARABINIERI)

$$\frac{\sin(a_n)}{a_n} \to 1$$

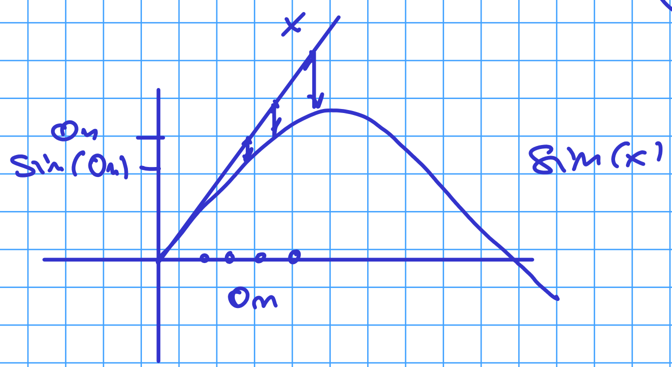
<u>OSS.</u> Posso interpretare questo limite dicendo che

$$\frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1 + \sigma_n \qquad \text{dove } \sigma_n \to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(a_n) = a_n + a_n \sigma_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(a_n) = a_n + c_n \qquad \text{dove } \frac{c_n}{a_n} \to 0$$

$$\sin(a_n) = a_n + \underbrace{\text{"infinitesimo di ordine superiore ad } a_n\text{"}}_{\text{DA DEFINIRE}}$$

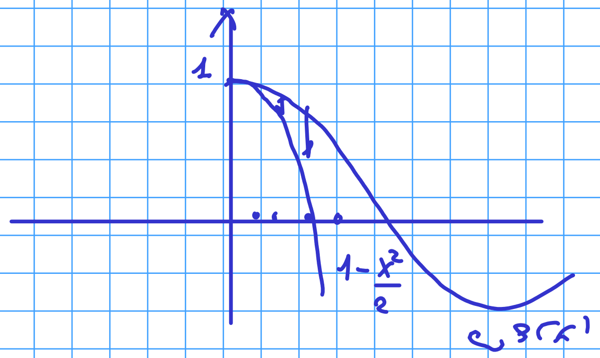


Data $\{a_n\}$ con $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0 \ \forall n$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}}$$

Dunque (se tale limite è corretto) $\cos(a_n) = \underbrace{1 - \frac{a_n^2}{2} + c_n}$

dove $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n^2} = 0$ (VERIFICARE!)



Per trovare il limite basta scrivere:

$$\frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{(1-\cos(a_n))(1+\cos(a_n))}{a_n^2(1+\cos(a_n))} = \frac{\sin^2(a_n)}{a_n^2(1+\cos(a_n))} =$$

$$\frac{1}{1+\cos(a_n)}\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot(1)^2 = \frac{1}{2}$$

ESERCIZI (DALLA LISTA MESSA IN RETE)

- Dire se $a_n = \dfrac{n}{n^2+25}$ è crescente / decr. / def. cresc. / ..

Dato che $a_n > 0$ e $a_n \to 0$ è "plausibile" che sia decrescente (almeno definitivamente). Dunque mi devo chiedere se

$$a_{n+1} \le a_n \iff \frac{n+1}{(n+1)^2+25} \le \frac{n}{n^2+25}$$

$$\iff (n+1)(n^2+25) \le n\left[n^2+2n+1+25\right]$$

$$\iff \cancel{n^3}+\cancel{25n}+n^2+25 \le \cancel{n^3}+2n^2+\cancel{25n}+n$$

$$0 \le n^2+n-25$$

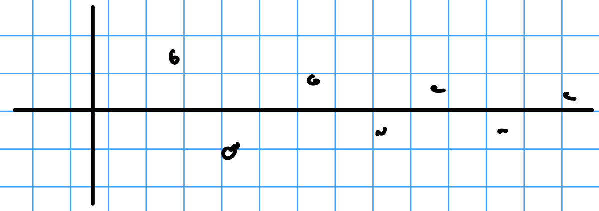
NON È VERA $\forall n$ ($n=1,2$ FALSA) PERÒ È VERA PER n grande dato che $n^2+n-25 \to +\infty$

RISPOSTA: $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente

- $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ NON VERIFICA NESSUNA DELLE PROPRIETÀ in effetti $a_n \to 0$ $\left((-1)^n \text{ limitata, } \frac{1}{n+1} \to 0 \right)$

$a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ decrescente

$a_{2n+1} = \frac{-1}{2n+2}$ crescente



$\{a_n\}$ NON è DEF. crescente e NEMMENO DEF. decrescente

Dato a_n (che tende a zero) trovare un n_0 tale che

$$|a_n| < \frac{1}{1000}$$

- $a_n = \frac{1}{1+n^6}$ $\qquad a_n < \frac{1}{n^6}$ $\qquad$ basta prendere $n_0 = 4$

  $(\text{se } n \geq 4 \Rightarrow n^6 \geq 4^6 = 16^3 > 10^3)$

- $a_n = \frac{1}{n!}$

  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{1000} \iff n! > 1000$ $\qquad n_0 = 7$ $(6! = 720,\ 7! > 1000)$

- $a_n = \frac{2^n}{n^n}$. cosa serve su n perché $\frac{2^n}{n^n} \geq 1000$

Possiamo fare così: (1) dimostro che $b_n = \frac{n^n}{2^n}$ è crescente

(2) Trovo, a tentativi, il migliore n tale che $b_n > 1000$

(1) Vediamo se $\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \geqslant \frac{n^n}{2^n} \iff$

$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \geqslant 2 \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant \frac{2}{n+1}$

$\iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant \frac{2}{n+1}$ VERA $\forall n$ DATO CHE

$n \mapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ CRESCE (è sempre maggiore di $\left(1+1\right)^1 = 2$)

$n \mapsto \frac{2}{n+1}$ DECRESCE ed è sempre minore di $\frac{2}{1+1} = 1$

DUNQUE $\frac{n^n}{2^n}$ è crescente

(2) Proviamo qualche valore di n

$n = 6 \qquad \frac{6^6}{2^6} > 1000 \qquad ?? \quad (\text{NO})$

$6^6 = 729$

$n = 7 \qquad 57 \ldots$

$$\boxed{n = 7}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + n - 7} - \sqrt[4]{n^5 + n^3 - 1}}{\sqrt[5]{n^6 + 64}} \qquad \left(\simeq \frac{n^{\frac{4}{3}} - n^{\frac{5}{4}}}{n^{\frac{6}{5}}} \to +\infty \right)$$

In maniera rigorosa

$$= \frac{15-16}{12} = -\frac{1}{12} < 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{n^4 + n - 7} - \sqrt[4]{n^5 + n^3 - 1}}{\sqrt[5]{n^6 + 64}} = \frac{n^{4/3}}{n^{6/5}} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3} - \frac{7}{n^4}} - n^{\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^5}}}{\sqrt[5]{1 + \frac{64}{n^6}}}$$

$$= \frac{20-18}{15} = \frac{2}{15} > 0$$

$$= n^{\frac{4}{3} - \frac{6}{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + \text{infinitesimo} - \text{infinitesimo}}}{\sqrt[5]{1 + \text{infinitesimo}}} \longrightarrow +\infty$$