Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Decima lezione, 29 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

LIMITI NOTEVOLI di successioni

- Se P e Q sono due polinomi di grado k e h rispettivamente e

$$P(x) = ax^k + \text{termini di grado} < k, \quad Q(x) = bx^h + \text{termini di grado} < h$$

dove $a \neq 0$ e $b \neq 0$, allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \text{ e } a/b > 0; \\ -\infty & \text{se } k > h \text{ e } a/b < 0; \\ \dfrac{a}{b} & \text{se } k = h; \\ 0^+ & \text{se } k < h \text{ e } a/b > 0; \\ 0^- & \text{se } k < h \text{ e } a/b < 0. \end{cases}}$$

Lo stesso risultato vale con potenze reali positive (invece che intere), purché si possano **isolare le potenze massime** al numeratore e al denominatore.

- Sia $A \geq 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n = 0 \quad \text{se } A < 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} A^n = +\infty \quad \text{se } A > 1.}$$

Inoltre se $\alpha > 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha A^n = 0 \quad \text{se } A < 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{se } A > 1.}$$

- Sia $A > 0$, allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A} = 1.}$$

Più in generale se $0 < A_1 < A_2$ sono due numeri e se $\{a_n\}$ è una successione tale che $A_1 \leq a_n \leq A_1$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

- Siano $A > 1$ e $\alpha > 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_A(n)}{n^\alpha} = 0.}$$

- Sia $A \geq 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{n!} = 0.}$$

- Si ha:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.}$$

Sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima, cioè $a_n \to 0$, e tale che $a_n \neq 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^{\alpha}-1}{a_n} = \alpha \qquad \text{per qualunque } \alpha \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}}$$

Oss. Se $A_1 \le a_n \le A_2$ con $0 < A_1 < A_2$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1$. Infatti

$$\underbrace{\sqrt[n]{A_1}}_{\downarrow\, 1} \le \sqrt[n]{a_n} \le \underbrace{\sqrt[n]{A_2}}_{\downarrow\, 1} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 1$$

(sicuramente vero se $a_n \to \ell$ con $0 < \ell < +\infty$)

ESEMPIO

$$\sqrt[n]{1+2^n} = \sqrt[n]{2^n(1+1/2^n)} = 2\sqrt[n]{\underbrace{1+1/2^n}_{\downarrow\, 1}} \to \boxed{2}$$

Se $1+\frac{1}{2^n} \to 1$ sicuramente $\frac{1}{2} \le 1 + \frac{1}{2^n} \le 2$ (definitivamente)

$$\Rightarrow \sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} \to 1$$

$$\sqrt[n]{2^n+3^n} = \sqrt[n]{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = 3\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to \boxed{3}$$

Dato che $0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 1$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \to 1$$

$$\sqrt[n]{2 + \sin(n)} \longrightarrow \boxed{1}$$

NON HA LIMITE PERÒ $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq 2 + \sin(n) \leq 3$$

Conseguenze di $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

<u>VEDIAMO CHE</u> se $\{a_n\}$ è una successione tale che $a_n \to +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

<u>DIM.</u> Notiamo che $[a_n] \leq a_n \leq [a_n] + 1$ $\left([x] = \text{parte intera di } x\right)$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} \quad \forall n$$

GUARDIAMO LA SUCC. a dx:

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right) \longrightarrow e$$

Noto che $[a_n] \geq a_n - 1 \longrightarrow +\infty \Rightarrow [a_n] \longrightarrow +\infty \Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right) \longrightarrow 1+\frac{1}{\infty} = 1+0 = 1$$

Invece $\boxed{\left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} \longrightarrow e}$ come conseguenza di

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$$

($[a_n]$ è un intero che tende a $+\infty$)

ANALOGAMENTE

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} = \frac{\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]+1}}{\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)} \longrightarrow \frac{e}{1} = e$$

Usando i due confronti $\Rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \longrightarrow e$

ESEMPI

- $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$ (si potrebbe anche ricavare direttamente da $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e$)

- $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \to e$

- $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} \to 1$ INFATTI

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \circledast$$

DATO CHE $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$ e $0 < e < +\infty$ $\Rightarrow$ $\circledast \to 1$

- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n} \to +\infty$; INFATTI

SO CHE $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e > 2$

$\Rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geq 2$ DEFINITIVAMENTE

$\Rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq \underbrace{2^n}_{\to +\infty}$ DEFINITIVAMENTE $\Rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$

ALTERNATIVAMENTE ($\ln(x)$ indico il $\log_e(x)$)

sia $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Facciamo $\ln(a_n) =$

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right) = \ln\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{n}\right) = n \underbrace{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)}_{\text{TENDE A } \ln(e) = 1}$$

$$\Rightarrow \ln(a_n) \to +\infty \Rightarrow a_n = e^{\ln(a_n)} \to +\infty$$

(HO USATO: se $\underline{b_n \to +\infty \Rightarrow e^{b_n} \to +\infty}$)

IDEA UTILE: se ho un'espressione $a_n^{b_n}$ CONVIENE PASSARE AL SUO LOGARITMO: $b_n \ln(a_n)$. COSÌ FACENDO SI PASSA A UN PRODOTTO.

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n} = e^{\alpha} \quad \text{qualunque sia } \alpha>0$$

INFATTI: $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n} = \left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha}$

E DATO CHE $\frac{n}{\alpha} \to +\infty$ $(\alpha>0)$ $\Rightarrow \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}} \to e$

FATTO GENERALE: se $\{a_n\}$ è una successione tale che

$$|a_n| \to +\infty \implies \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$$

(NOTA: NON È DETTO CHE a_n ABBIA LIM.)

DIM. **CASO I** $a_n \to -\infty$. Allora $-a_n \to +\infty$

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^{-a_n}} = \left(\frac{a_n \overset{+1-1}{}}{a_n+1}\right)^{-a_n}$$

$$\left(1-\frac{1}{a_n+1}\right)^{-a_n} = \left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)^{-a_n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)^{-a_n-1}}_{\downarrow\, e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{-a_n-1}\right)}_{\to 1}$$

perché $-a_n-1 \to +\infty$

CASO GENERALE (NON LO DIMOSTRIAMO ...)

ESEMPIO $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^{\alpha}$

$\alpha > 0$ L'ABBIAMO VISTO PRIMA

$\alpha = 0$ EVIDENTE

$\alpha < 0$: $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n/\alpha}\right)^{n/\alpha}}_{\to e}\Bigg]^{\alpha}$ e stavolta $\frac{n}{\alpha} \to -\infty$

ALTRO LIMITE: SE $\{a_n\}$ è una succ. con $a_n \to 0$ (e $a_n \neq 0 \ \forall n$) ALLORA

$$\left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} \to e$$

BASTA NOTARE CHE $\left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1 + \frac{1}{1/a_n}\right)^{1/a_n}$ e

se $a_n \to 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \to +\infty$

CONSEGUENZE IMPORTANTI Se $a_n \to 0$, e $a_n \neq 0$

ALLORA

(1) $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$

(2) $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$

(entrambe forme indeterminate tipo $\frac{0}{0}$)

DIM. (1) $\frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = \ln\left(\left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}}\right) \to \ln(e) = 1$

(dipende dall'avere preso e come base del logaritmo)

(2) Chiamo $b_n = e^{a_n} - 1 \Rightarrow b_n \to 0 \quad (b_n \neq 0 \ \forall n)$

$a_n = \ln(1+b_n)$

$$\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}} \to \frac{1}{1} = 1$$

PER ES: $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$

$$n\left(e^{1/n}-1\right) \to 1 \quad \left[\underbrace{\left(\sqrt[n]{e}-1\right) n \to 1} \right]$$

IDEA: Dire che $\left(\sqrt[n]{e}-1\right)n \to 1$ "significa" che

$$\left(\sqrt[n]{e}-1\right)n \simeq 1 \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt[n]{e}-1 \simeq \frac{1}{n}$$

E QUINDI $\sqrt[n]{e} \simeq 1+\frac{1}{n}$ (DISCORSI DA FORMALIZZARE)

ANCORA UN LIMITE NOTEVOLE:

Sia $\{a_n\}$ con $a_n \to 0$ e $a_n \neq 0$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha$$

- Se $\alpha = 1$ EVIDENTE

- $\underline{\alpha = 2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(1+a_n)^2 - 1}{a_n} = \dfrac{1 + 2a_n + a_n^2 - 1}{a_n} = \dfrac{2a_n + a_n^2}{a_n}$

$= 2 + a_n \to 2$

- $\underline{\alpha = 3}$ $\dfrac{(1+a_n)^3 - 1}{a_n} = \dfrac{1 + 3a_n + 3a_n^2 + a_n^3 - 1}{a_n} =$

$\dfrac{3a_n + 3a_n^2 + a_n^3}{a_n} = 3 + 3a_n + a_n^2 \to 3$

SI POTREBBE FARE ANALOGAMENTE $\alpha = k$ intero positivo usando il binomio di Newton

- $\alpha = \frac{1}{2}$ $\dfrac{\sqrt{1+a_n} - 1}{a_n}$ MOLTIPLICO E DIVIDO PER $\sqrt{1+a_n} + 1$

$= \dfrac{(\sqrt{1+a_n} - 1)(\sqrt{1+a_n} + 1)}{a_n(\sqrt{1+a_n} + 1)} = \dfrac{\cancel{1} + a_n - \cancel{1}}{a_n(\sqrt{1+a_n} + 1)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n} + 1} \to \frac{1}{2}$

IL CASO GENERALE IN REALTÀ SEGUE DIRETTAMENTE DAI LIMITI NOTEVOLI VISTI PRIMA:

$$\frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \frac{e^{\alpha \ln(1+a_n)} - 1}{a_n} =$$

$$\frac{e^{\alpha \ln(1+a_n)} - 1}{\alpha \ln(1+a_n)} \cdot \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \cdot \alpha \longrightarrow \alpha$$

$\frac{e^{b_n}-1}{b_n}$ dove $b_n = \alpha \ln(1+a_n) \to 0$

$\frac{e^{b_n}-1}{b_n} \to 1$ (limite notevole (2))

$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1$ (limite notevole (1))

QUALCHE ESERCIZIO CON I LIMITI (usando questi fatti)

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - n^2}{n^2 - n + \sqrt{n} - 1}$$

- A NUMERATORE IL "TERMINE DOMINANTE" È n^2
- A DENOMINATORE PURE n^2

SE METTO IN EVIDENZA n^2 SIA sopra che sotto trovo

$$\frac{\sqrt{n^3+1}-n^2}{n^2-n+\sqrt{n}-1} = \frac{\cancel{n^2}\left[\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}-1\right]}{\cancel{n^2}\left[1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}\right]} \to \frac{-1}{1} = -1$$

• $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

($\sqrt{n^2+1}$ sembra essere circa n
in effetti $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \frac{n}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$)

(PERÒ NON POSSO SOSTITUIRE n a $\sqrt{n^2+1}$)

IN REALTÀ si fa moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2+1}+n$ $\Rightarrow$

$$\sqrt{n^2+1}-n = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to \frac{1}{\infty} = 0$$

• $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$$

(ANCHE QUI può sembrare che $\sqrt{n^2+n+1}\simeq n$
in effetti $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} \to 1$)

FACCIAMO COME PRIMA:

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1} + n\right)}{\sqrt{n^2+n+1} + n} =$$

$$\frac{\cancel{n^2} + n + 1 - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n+1} + n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \frac{1 + 1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + 1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

STAVOLTA SE AVESSI SOSTITUITO n a $\sqrt{n^2+n+1}$ AVREI TROVATO UN RISULTATO ERRATO

IN EFFETTI $\sqrt{n^2+n+1} = n +$ "termini di grado < 1"

SE n VIENE SEMPLIFICATO CONTANO I TERMINI DI GRADO < 1

(lo vedremo bene in seguito)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\underset{\uparrow \atop A}{\sqrt[3]{n^3+1}} - \underset{\uparrow \atop B}{n} \right)$$

Se voglio togliere la forma indeterminata devo usare

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$\sqrt[3]{n^3+1}-n=\frac{\overset{A^3}{\cancel{n^3}+1}-\overset{B^3}{\cancel{n^3}}}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}\to\frac{1}{\infty}=0$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$$ stesso procedimento

$$\underset{\substack{\uparrow\\A}}{\sqrt[3]{n^3+n}}-\underset{\substack{\uparrow\\B}}{n}=\frac{\cancel{n^3}+n-\cancel{n^3}}{\left(\sqrt[3]{n^3+n}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}=$$

$$\frac{n}{n^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}=\frac{1}{n}\,\frac{1}{\dots}\to 0$$

- $$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)\qquad\left(0\cdot\infty \text{ dato che } \sqrt[3]{n^3+1}-n\to 0\right)$$

CON GLI STESSI CONTI FATTI PRIMA

$$n\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=n\,\frac{\cancel{n^3}+1-\cancel{n^3}}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=\frac{n}{n^2}\,\frac{1}{\underbrace{\dots}_{\text{tende a } 3}}\to 0$$

- $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right) = \frac{1}{3}$ in fatti (solito procedimento)

$$n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right) = n\,\frac{\cancel{n^3}+n-\cancel{n^3}}{\left(\sqrt[3]{n^3+n}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2} =$$

$$\frac{n^2}{n^2}\,\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{3}$$

COMMENTI (sull'ultimo limite)

DIRE CHE $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right) = \frac{1}{3}$ EQUIVALE A

$$n\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right) = \frac{1}{3}+\sigma(n) \quad \text{dove} \quad \boxed{\sigma(n)\to 0}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{n^3+n}-n = \frac{1}{3n}+\frac{\sigma(n)}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[3]{n^3+n} = n+\frac{1}{3n}+\frac{\sigma(n)}{n}$$

(è un'eguaglianza vera n per n)

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt[3]{n^3+n} = n + \frac{1}{3n} + c_n$$

dove c_n ha la proprietà $\underbrace{\lim_{n\to\infty} n\, c_n = 0}$

SI PUÒ ESPRIMERE DICENDO CHE "$c_n \to 0$ PIÙ VELOCEMENTE" di $1/n$ $\left(n c_n = \frac{c_n}{1/n} \to 0 \right)$

DUNQUE "in prima approssimazione" $\sqrt[3]{n^3+n} \simeq n$

SE MI SPINGO OLTRE $\sqrt[3]{n^3+n} \simeq n + \frac{1}{3n}$

ALTRA OSSERVAZIONE (sul penultimo limite) se guardo come ho fatto $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - n = 0$, mi accorgo che (. . .)

$$n^2 \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n \right) \longrightarrow \frac{1}{3}$$

QUESTO SI PUÒ ESPRIMERE DICENDO CHE (stessi calcoli)

$$\sqrt[3]{n^3+1} = n + \frac{1}{3n^2} + c_n$$

dove $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{1/n^2} = 0$, cioè

$c_n \to 0$ più velocemente di $\frac{1}{n^2}$

$$: \; n^2\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\frac{1}{3}+o(n) \iff \sqrt[3]{n^3+1}-n=\frac{1}{3n^2}+\frac{o(n)}{n^2} \iff$$

$$\sqrt[3]{n^3+1}=n+\frac{1}{3n^2}+\underbrace{\frac{o(n)}{n^2}}_{c_n}$$

HO VISTO DUNQUE:

$$\sqrt[3]{n^3+1}=n+\frac{1}{3n^2}+\text{"infinitesimo di ordine superiore a } \frac{1}{n^2}\text{"}$$

$$\sqrt[3]{n^3+1}=n+\frac{1}{3n}+\text{"infinitesimo di ordine superiore a } \frac{1}{n}\text{"}$$

ULTIMO ESEMPIO

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)=\frac{1}{3}$$, solito procedimento

$$\frac{\cancel{n^3}+n^2-\cancel{n^3}}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}\longrightarrow\frac{1}{3}$$

DUNQUE (lo verifico) POSSO SCRIVERE $\sqrt[3]{n^3+n^2}=n+\frac{1}{3}+o(n)$ dove $o(n)\to 0$

TUTTO QUESTO SI PUÒ SENZA USARE LA FORMULA $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

MA USANDO IL LIMITE NOTEVOLE $\dfrac{(1+a_n)^{1/3}-1}{a_n} \to \dfrac{1}{3}$

(se $a_n \to 0$) : Prendo $\beta<3$ e esamino:

$$\otimes = \left(\sqrt[3]{n^3+n^\beta}-n\right) = n\left[\left(1+n^{\beta-3}\right)^{1/3}-1\right]$$

e so che $n^{\beta-3} \to 0$ (perché $\beta<3$). DUNQUE

$$\otimes = n \cdot n^{\beta-3}\underbrace{\left[\frac{\left(1+n^{\beta-3}\right)^{1/3}-1}{n^{\beta-3}}\right]}_{\to 1/3} = n^{\beta-2}\left[\frac{1}{3}+\sigma(n)\right]$$

con $\sigma(n) \to 0$

HO DIM. CHE $\boxed{\sqrt[3]{n^3+n^\beta} = n + \frac{1}{3}n^{\beta-2} + c_n}$ dove $n^{\beta-2}c_n \to 0$

ALLORA POSSO FARE "COSE PIÙ COMPLICATE"

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[5]{n^5+1} - n\right) n^4$$

(se volessi "razionalizzare" dovrei usare
$$A^5 - B^5 = (A-B)(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4)$$)

NO ↗

USIAMO IL LIMITE NOTEVOLE $\dfrac{(1+a_n)^{1/5}-1}{a_n} \to \dfrac{1}{5}$ (se $a_n \to 0$)

MI CI RICONDUCO:

$$\left(\sqrt[5]{n^5+1} - n\right) n^4 = n\left[\left(1+\frac{1}{n^5}\right)^{1/5} - 1\right] n^4 = n^5\left[\left(1+\frac{1}{n^5}\right)^{1/5} - 1\right] =$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n^5}\right)^{\frac{1}{5}} - 1}{\frac{1}{n^5}} \to \frac{1}{5}$$

$n! \to \infty$; cosa succede se considero $\sqrt[n]{n!}$??

USIAMO CESARO: se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \ell$

QUI $a_n = n!$. Quindi faccio $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty$

DUNQUE $\sqrt[n]{n!} = +\infty$

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to ??$ (NOTA: ho una forma $\frac{\infty}{\infty}$)

Lo posso scrivere $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ e usare ancora Cesàro con $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!\ n^n}{(n+1)^{n+1}\ n!} = \frac{(n+1)\ n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$ QUINDI $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

$\iff \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} + c_n$ dove $\frac{c_n}{n} \to 0$ (VERIFICARE)

(NON so se $c_n \to 0$)

PRENDIAMO $A>0$ e calcoliamo (se ci riusciamo ...)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n\, n!}{n^n}$$

FACCIAMO LA $\sqrt[n]{\cdot}$ e per calcolarne il limite usiamo Cesaro, cioè

se $a_n = \frac{A^n\, n!}{n^n}$ calcoliamo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{A^n\, n!} = A \frac{n^n}{(n+1)^n} \to \frac{A}{e}$$

SE NE RICAVA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n\, n!}{n^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } A>e \\ ?? & \text{se } A=e \\ 0 & \text{se } A<e \end{cases}$$

(e sarebbe complicato farlo)

SI POTREBBE DIMOSTRARE CHE $(A=e)$

$$\frac{e^n\, n!}{n^n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

(Formula di Stirling!)