Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Nona lezione, 28 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Alcuni limiti "notevoli" (continua..)

Dato $A > 0$ si ha $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = 1}$

Uso la def. (caso $A > 1$). Devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0$

$$\underbrace{1 - \varepsilon < \sqrt[n]{A}}_{\text{VALE SEMPRE SE } A>1} < 1 + \varepsilon \qquad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

Devo dim. la d.s. di destra:

$$\sqrt[n]{A} < 1 + \varepsilon \qquad \text{DEF.}$$

equivalentemente:

$$A < (1+\varepsilon)^n \qquad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

Ma io so che $\lim_{n\to\infty} (1+\varepsilon)^n = +\infty$ (perché $1+\varepsilon > 1$)

ne segue che per n grande $(1+\varepsilon)^n > A$

(quello che volevo dim.). Il caso $0 < A < 1$ è analogo.

(ALTRE)
✓ CONSEGUENZE DI CESARO:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0 \qquad (\forall\ A>0)$$

($n!$ va all' ∞ "più velocemente" di A^n

DIM. Se pongo $a_n = \frac{A^n}{n!}$ e calcolo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{A^n}{n!}} = \frac{A^{n+1}\, n!}{A^n\,(n+1)!} = \frac{A}{n+1} \longrightarrow 0$$

PER CESARO $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 0$; per il criterio "sulla radice"

$\Rightarrow a_n \to 0$ (MINORE DI UNO)

SI PUÒ ANCHE FARE A MENO DI CESARO NOTANDO CHE

$$\frac{A^n}{n!} = \frac{A}{1}\cdot\frac{A}{2}\cdots\frac{A}{n} = \frac{A}{1}\cdots\frac{A}{n_0}\,\underbrace{\frac{A}{n_0+1}}_{<1}\cdots\frac{A}{n} \le$$

dove $n_0 = [A]+1$

$$\frac{A}{1}\cdots\frac{A}{n_0}\cdot\frac{A}{n} \longrightarrow 0$$

ALTRO LIMITE: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (~~in sospeso~~)

(n^n va "ancora più veloce" di $n!$). Anche qui posso usare Cesaro: pongo $a_n = \frac{n!}{n^n}$ e calcolo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\cancel{(n+1)}!\; n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}\, n}\;\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to ?$$

TENDE A $1/e$

(viene $\frac{1}{e} < 1$ da cui $a_n \to 0$, MA LO VEDIAMO DOPO)

implica che $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

CONSEGUENZA (facile) $\frac{A^n}{n^n} \to 0$; infatti

$$\frac{A^n}{n^n} = \underbrace{\frac{A^n}{n!}}_{\to 0}\;\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

(qualunque sia $A \geq 0$)

TORNIAMO 'alla teoria':

TEOREMA (limite di successioni monotone)

Ricordo che $\{a_n\}$ si dice crescente se (decrescente)

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \qquad (a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n)$$

Se $\{a_n\}$ è crescente (decrescente) $\Rightarrow$ esiste $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, anzi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_n a_n \quad \left(= \inf_n a_n \right)$$

(eventualmente infiniti)

LA COSA IMPORTANTE È CHE QUESTO TEOREMA GARANTISCE L'ESISTENZA DEL LIMITE (conseguenza di DEDEKIND)

DIM. CASO CRESCENTE. CHIAMO $\ell = \sup_n a_n \quad (\in]-\infty, +\infty])$

ℓ ESISTE per le proprietà di $\mathbb{R}$

Voglio dimostrare che $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

I° CASO $\ell \in \mathbb{R}$. Per le proprietà del sup:

(1) $a_n \leq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ a_{\bar{n}} > \ell - \varepsilon$

Allora dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $\bar{n}$ come in (2) e consideriamo $n \geq \bar{n}$. Dato che a_n è crescente si ha $a_n \geq a_{\bar{n}}$

$$\Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

$$\forall n \geq \bar{n}$$

HO VERIFICATO LA DEF. di $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ (se $\ell \in \mathbb{R}$)

II° CASO: $\ell = +\infty$. Allora se $\sup a_n = +\infty$, so che

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : \ a_{\bar{n}} \geq M$$

Dato che a_n cresce, se $n \geq \bar{n}$ $\quad a_n \geq a_{\bar{n}} \geq M$

HO TROVATO CHE $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad a_n \geq M$

CIOÈ HO DIM. CHE $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

FINE DIM.

DUNQUE LE SUCC. CRESCENTI HANNO SEMPRE LIMITE (FINITO O $+\infty$). PER TALI SUCCESSIONI LE DUE PROPRIETÀ

- $\{a_n\}$ HA limite finito
- $\{a_n\}$ LIMITATA

SONO EQUIVALENTI

CONSEGUENZA (per le tante che vedremo).

POSSO DEFINIRE $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (\in \mathbb{R})$

- ammesso che io posso dim. che la succ. $\{a_n\}$ def. da

$$\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

è crescente (e limitata)

VEDIAMO COME SI FA.

Conviene introdurre anche un altro succ.

$$\boxed{b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

FATTO: $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq a_n$

MOSTRIAMO CHE $\{a_n\}$ cresce, cioè $a_{n+1} \geq a_n$ $(\forall n \geq 1)$

$\sim$ $a_n \geq a_{n-1}$ $(\forall n \geq 2)$ (perché così i conti vengono più facili)

VOGLIO DIM.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \qquad n = 2, \dots$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leftarrow = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\frac{n}{n-1}}$$

$$\iff \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \geq \frac{1}{\frac{n}{n-1}}$$

$$\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

$$\Uparrow$$

È VERA A CAUSA DI BERNOULLI; INFATTI

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

$\uparrow$

a

HO DIM. CHE $\{a_n\}$ cresce!

<u>DIMOSTRIAMO CHE</u> $\{b_n\}$ DECRESCE: $b_n \leq b_{n-1}$ $\forall n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Longleftrightarrow$$

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \Longleftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \iff$$

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

$$\Uparrow$$

VERA (DI NUOVO PER BERNOULLI). INFATTI:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} \geq 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

<u>DUNQUE $\{b_n\}$ DECRESCE</u>

RIASSUMENDO

$$2 = a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b_1 = 4$$

Per il teorema sulle succ. monotone esistono

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad e \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

e per i teoremi di confronto sui limiti

$$2 \leq a \leq b \leq 4$$

DIMOSTRIAMO CHE $a = b$: dato che

$$b_n = a_n \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow \, 1} \Rightarrow b = a$$

$$\begin{array}{cc} b_n & a_n \\ \downarrow & \downarrow \\ b & a \end{array}$$

DUNQUE POSSO CHIAMARE e il valore comune dei due limiti

NOTA $a_n \to e^-$ $b_n \to e^+$

Anzi (essendo $e = \sup a_n = \inf b_n$)

$$a_n \leq e \leq b_n$$ ← PUÒ SERVIRE PER TROVARE DELLE APPROSSIMAZIONI DI e

SI SA CHE $e \simeq 2,71$

SE PRENDO $n = 4$ trovo

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2,44..$$

$$b_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^5 = 3,05..$$ (con n più grande è meglio..)

ESEMPIO $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to\ ??$

PARTIAMO DA $\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{1}{e} \iff$

$$\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \iff$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} \iff$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

SE LO MOLTIPLICO PER $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ (CHE TENDE A 1)

TROVO

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e}$$

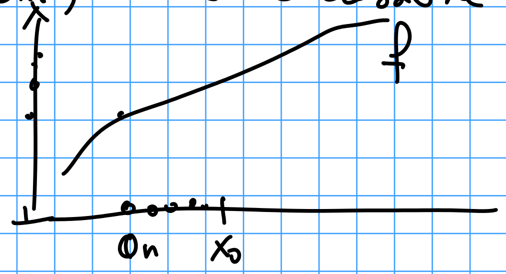
È FACILE RICAVARNE CHE $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$

(SE $a_n \to e \implies a_{n+1} \to e$: APPLICARE LA DEF.)

ALTRO TEOREMA "ASTRATTO"

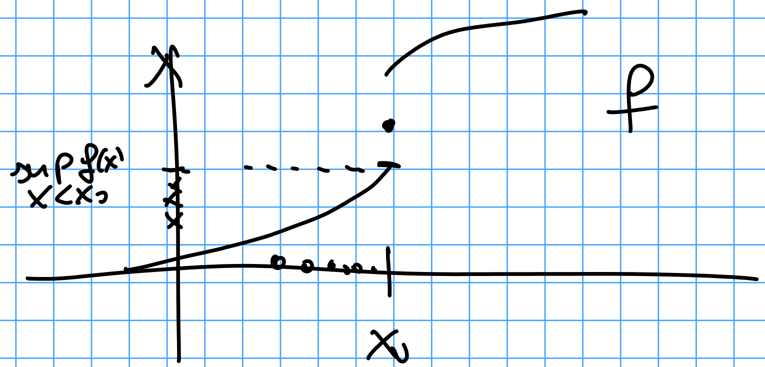
TEOREMA Considero $f : I \to \mathbb{R}$ dove I è un intervallo in $\mathbb{R}$, f CRESCENTE

SIA $x_0 \in I$ e $\{a_n\}$ una successione che tende a x_0.



(1) Se $a_n \to x_0^-$ $\Rightarrow$ $f(a_n) \to \sup\limits_{x<x_0} f(x)$

(2) Se $a_n \to x_0^+$ $\Rightarrow$ $f(a_n) \to \inf\limits_{x>x_0} f(x)$



(3) Se so che $\sup\limits_{x<x_0} f(x) = f(x_0) = \inf\limits_{x>x_0} f(x)$

allora da $a_n \to x_0$ SEGUE $f(a_n) \to f(x_0)$

DIM (dimostro la (1) – le altre sono simili)

Chiamo $\ell = \sup_{x<x_0} f(x)$ $(\in \mathbb{R})$. So che

(1) $f(x) \le \ell$ $\quad \forall x < x_0$

(2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \underline{x} < x_0$ tale che $\ell - \varepsilon < f(\underline{x})$

Dato che $a_n \to x_0^-$ DEDUCO CHE

$\underline{x} < a_n < x_0$ DEFINITIVAMENTE

$\Rightarrow \ell - \varepsilon \le f(\underline{x}) \le f(a_n) \le \ell$ DEFINITIVAMENTE

DUNQUE HO VERIFICATO CHE $f(a_n) \to \ell$

CONSEGUENZE: (1) Dato $\alpha > 0$ e dato $\ell \ge 0$

$$a_n \to \ell \implies a_n^{\alpha} \to \ell^{\alpha}$$

(DANDO PER BUONO CHE $\sup_{x<x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha} = \inf_{x>x_0} x^{\alpha}$

COSA CHE HO GIÀ DETTO IN PRECEDENZA)

(2) Se $a_n \to \ell \implies A^{a_n} \to A^{\ell}$ $\quad 0<A$

(3) Se $a_n \to \ell > 0 \implies \log_A(a_n) \to \log_A(\ell)$ $\quad 0<A, A\neq 1$

Con una semplice modifica del teorema di prima si vede anche che

- $a_n \to +\infty \implies a_n^{\alpha} \to +\infty$ $\quad (\alpha>0)$
- $a_n \to +\infty \quad A^{a_n} \to +\infty \left(= \sup_x A^x\right)$
- $a_n \to -\infty \implies A^{a_n} \to 0 \left(= \inf_x A^x\right)$
- $a_n \to +\infty \implies \log_A(a_n) \to +\infty$
- $a_n \to 0^+ \implies \log_A(a_n) \to -\infty$

(qui $A>1$)