Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Ottava lezione, 22 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Limiti di successioni.

Terminologia: • $\{a_n\}$ è CONVERGENTE se $\{a_n\}$ ha limite ℓ con $\ell \in \mathbb{R}$ (limite finito)

• $\{a_n\}$ è DIVERGENTE se $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ o $-\infty$

• $\{a_n\}$ è INDETERMINATA / IRREGOLARE se $\{a_n\}$ NON HA LIMITE

• $\{a_n\}$ è INFINITESIMA se $a_n \to 0$

DEF. (limiti per eccesso / difetto). $\{a_n\}$ successione e $\ell \in \mathbb{R}$

Dico che $\{a_n\}$ tende a ℓ per eccesso (per difetto) se

$a_n \to \ell$ e $a_n > \ell$ definitivamente

($a_n \to \ell$ e $a_n < \ell$ definitivamente)

SCRIVO

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell^+ \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \ell^- \right)$$

CONTINUIAMO CON LE PROPRIETÀ

(Limiti e ordine)

(teorema del confronto per i limiti)

Teorema Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due succ.; se

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

$$a_n \to \ell_1, \quad b_n \to \ell_2$$

$(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*)$

ALLORA $\ell_1 \leq \ell_2$

Teorema (permanenza del segno) Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due succ. tali che

$$a_n \to \ell_1 \qquad b_n \to \ell_2$$

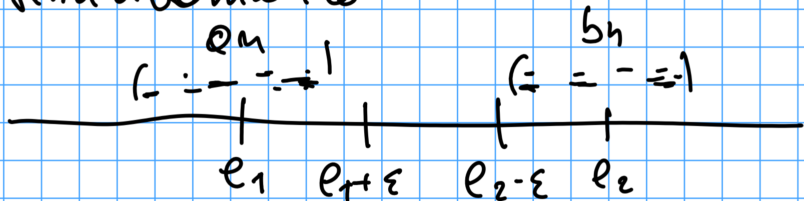
$(\ell_1 \text{ e } \ell_2 \in \mathbb{R}^*)$

e $\ell_1 < \ell_2$

(anche se la dim. è fatta nel caso reale)

ALLORA $a_n < b_n$ definitivamente

DIM. Prendo $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$



Dato che $a_n \to \ell_1 \Rightarrow$ definitivamente $\ell_1 - \varepsilon < \underbrace{a_n < \ell_1 + \varepsilon}$

Dato che $b_n \to \ell_2 \Rightarrow$ definitivamente $\underbrace{\ell_2 - \varepsilon < b_n} < \ell_2 + \varepsilon$

DUNQUE definitivamente $a_n < \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon < b_n$

NOTA In particolare se $a_n \to \ell > 0$, allora

$a_n > 0$ definitivamente

Basta applicare il teorema di sopra con l'altra successione identicamente nulla

(DA CUI IL NOME "Permanenza del segno")

Dalla permanenza del segno $\Rightarrow$ confronto.

(se $a_n \leq b_n \Rightarrow \ell_1 \leq \ell_2$)

INFATTI se fosse $\ell_1 > \ell_2 \Rightarrow a_n > b_n$ ASSURDO

NOTA !! Nel confronto non posso ottenere ">", cioè

NON È VERO: $a_n < b_n \Rightarrow \ell_1 < \ell_2$.

Per esempio $0 < \frac{1}{n}$ MA $\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Teorema (dei due carabinieri) Se $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sono tre successioni tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ (definitivamente)

$a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$ (LO STESSO ℓ !!).

ALLORA anche $b_n \to \ell$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$. So che

$$\underbrace{\ell - \varepsilon < a_n} < \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

$$\ell - \varepsilon < \underbrace{c_n < \ell + \varepsilon} \quad \text{definitivamente}$$

Allora definitivamente valgono entrambe, da cui

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon \quad \text{definit.}$$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario ho dim. che $b_n \to \ell$

(limiti e operazioni)

Teorema Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni

con $a_n \to \ell_1$ $b_n \to \ell_2$ $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$

(a) $\qquad a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$

(b) $\qquad a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$

(c) $\qquad$ se $\ell_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ $\left(\dfrac{a_n}{b_n} \text{ è definita se } n \text{ grande} \right)$

DIM (solo la (a))

DEVO DIM. che: $\forall \varepsilon > 0 \quad (\ell_1 + \ell_2) - \varepsilon < a_n + b_n < (\ell_1 + \ell_2) + \varepsilon$ definitivamente $\quad (*)$

Dato che $a_n \to \ell_1$ so che fissato $\varepsilon > 0$

$$\ell_1 - \varepsilon/2 < a_n < \ell_1 + \varepsilon/2$$
DEFINITIVAMENTE

(applico la def di limite con $\varepsilon/2 > 0$)

Analogamente da $b_n \to \ell_2$ ricavo:

e
$$\ell_2 - \varepsilon/2 < b_n < \ell_2 + \varepsilon/2$$
DEFINITIVAMENTE

Allora, definitivamente valgono entrambe; se sommo trovo $(*)$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario ho verificato $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$

(d) $\qquad$ Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata, allora

(non chiedo che $\{b_n\}$ abbia limite)

$a_n \cdot b_n \to 0$

($\{b_n\}$ limitata : $-M \leq b_n \leq M$ per una opportuna M)

per esempio $b_n = (-1)^n$ è limitata - ma non ha limite

Dim. So che $\underline{-M \leq b_n \leq M}$ (per un opportuno M)

e so che $a_n \to 0$. Fisso $\varepsilon > 0$. Allora:

$$-\frac{\varepsilon}{M} \leq a_n \leq \frac{\varepsilon}{M}$$ definitivamente

(applico la def con $\frac{\varepsilon}{M}$)

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq -\frac{\varepsilon}{M} b_n \leq a_n b_n \leq \frac{\varepsilon}{M} b_n \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} \cancel{M} = \varepsilon$$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario ho provato che $a_n b_n \to 0$

ESEMPIO. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Infatti posso applicare la (d) con $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = (-1)^n$. Abbiamo visto che $\frac{1}{n} \to 0$ ed è chiaro che $-1 \leq b_n \leq 1$

ANALOGAMENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

Si potrebbe vedere (MA NON È OVVIO) che $\nexists \lim_{n\to+\infty} \sin(n)$

MA NON CI INTERESSA, DATO CHE $\boxed{-1 \leq \sin(n) \leq 1}$

Applico la (d) e ricavo $\frac{\sin(n)}{n} \to 0$

<u>NOTA</u> Si poteva dim. la (d) usando i due carabinieri

$$\underbrace{-a_n M}_{\downarrow\, 0} \leq a_n b_n \leq \underbrace{a_n M}_{\downarrow\, 0} \implies a_n b_n \to 0$$

Limiti e operazioni nei casi ∞.

<u>CONVENZIONI</u>

$\ell + \infty = +\infty$ se $\ell \in]-\infty, +\infty]$

$\ell - \infty = -\infty$ se $\ell \in [-\infty, +\infty[$

$\ell \cdot (+\infty) = +\infty$ se $\ell \in]0, +\infty]$

$\ell \cdot (+\infty) = -\infty$ se $\ell \in [-\infty, 0[$

$\ell \cdot (-\infty) = -\infty$ se $\ell \in]0, +\infty]$

$\ell \cdot (-\infty) = +\infty$ se $\ell \in [-\infty, 0[$

Teorema Se $a_n \to \ell_1$ e $b_n \to \ell_2$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$ ogni volta che $\ell_1 + \ell_2$ è definito $(\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*)$

(NO DIM.)

ESEMPIO $n^3 \to +\infty$ dato che $n \to +\infty$ e $n^3 = n \cdot n \cdot n$

ULTERIORE CONVENZIONE

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+ \quad ; \quad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0^- \quad ; \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Teorema Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{\ell}$ se $\frac{1}{\ell}$ è definito in una delle convenzioni (NO DIM.)

ESEMPIO Possiamo ricavare $\frac{1}{n} \to 0^+$ da $n \to +\infty$

I CASI NON COPERTI DALLE CONVENZIONI SI CHIAMANO "FORME INDETERMINATE"

INDETERMINATA È LA FORMA (non il limite)

cioè non posso decidere quanto fa il limite

(per es di $a_n \cdot b_n$) a partire SOLO da $\lim a_n$ e $\lim b_n$

PER STUDIARE UNA FORMA INDETERMINATA dovrò esaminare a_n e b_n (non solo i loro limiti)

Per esempio $\frac{n}{n} \to 1$ (ma scritto così è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$):

NON HA SENSO SCRIVERE $\frac{n}{n} \to$ " $\frac{\infty}{\infty}$ "

ESEMPIO (non banale)

$n^2 - n$ È UNA FORMA INDET. del tipo $+\infty - \infty$

Se però scrivo $n^2 - n = \underbrace{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\text{NON È PIÙ INDETERMINATA}} \longrightarrow +\infty$

$n^2 \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$

$1 - \frac{1}{n} \to 1$,

$1 \cdot (+\infty) = +\infty$

IDEA: n^2 "VINCE" su n (da formalizzare)

IN GENERALE se $P(n)$ = polinomio di grado K

cioè $P(n) = a_K n^K + a_{K-1} n^{K-1} + \dots + a_0 \left(= \sum_{i=0}^{K} a_i n^i \right)$

dove $a_K \neq 0$

Allora $P(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_K > 0 \\ -\infty & \text{se } a_K < 0 \end{cases}$

In effetti $P(n) = a_K n^K \left(1 + \frac{a_{K-1}}{a_K} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{a_K} \frac{1}{n^K} \right) =$

$$\underbrace{a_K n^K}_{\to +\infty} \Big(\underbrace{1 + \text{infinitesimi}}_{\to 1} \Big)$$

("VINCE" IL TERMINE DI GRADO MASSIMO)

ALTRO ESEMPIO $a_n = \dfrac{n^2 - n}{n^3 + 1}$ $\left(\text{FORMA IND } \dfrac{\infty}{\infty} \right)$

Mettendo in evidenza:

$$a_n = \frac{n^2}{n^3} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}}}_{\text{tende a } 1} \longrightarrow 0$$

REGOLA GENERALE

P, Q polinomi di grado k / h

$P(n) = a_k n^k + \dots \left(= \sum_{i=0}^{k} a_i n^i\right)$

$Q(n) = b_h n^h + \dots \left(= \sum_{i=0}^{h} b_i n^i\right)$

dove $a_k \neq 0 \quad b_h \neq 0$

ALLORA

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } h > k \\ \dfrac{a_k}{b_h} & \text{se } h = k \\ \dfrac{a_k}{b_h} \cdot (+\infty) & \text{se } k > h \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } \dfrac{a_k}{b_h} > 0 \\ -\infty & \text{se } \dfrac{a_k}{b_h} < 0 \end{cases}$$

Lo si vede scrivendo:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k n^k}{b_h n^h} \frac{1 + \text{infinitesimi}}{1 + \text{infinitesimi}} = \frac{a_k}{b_h} n^{k-h} (1 + \text{infinitesimi})$$

Dunque

$$\frac{n^3 - n^2 + n - 1}{3n^3 - n - 7} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{n^3 - n^2 + n - 1}{100 n^2 + 10} \longrightarrow +\infty$$

C'è sempre un'idea di "isolare il termine che conta di più"

Per esempio l'espressione $\frac{n^3 - n^2 + n - 1}{3n^3 - n - 7}$, AI FINI DEL LIMITE, di fatto equivale $\frac{n^3}{3n^3}$

VEDIAMO QUALCHE ALTRO LIMITE IMPORTANTE.

Sia $\boxed{A > 0}$ e consideriamo $a_n = A^n$ (progressione geometrica di ragione A)

SI HA:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } A > 1 \\ 1 & \text{se } A = 1 \quad \text{(ovvio)} \\ 0 & \text{se } A < 1 \end{cases}$$

DIM $\underline{A > 1}$ Se $A > 1$ la posso scrivere $A = 1 + \delta$

dove $\delta = A - 1 > 0$. Allora

$$A^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \to +\infty$$

$\Rightarrow A^n \to +\infty$ ("teorema dei due carabinieri con $c_n = +\infty$"

[DIAMO PER BUONO: se $a_n \geq b_n$ e $b_n \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$
(versione all'∞ dei 2 carabinieri ($a_n \leq +\infty$ é ovvio)]

Se invece $0 < A < 1 \Rightarrow$ $A^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0^+$

dato che $\frac{1}{A} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{A}\right)^n \to +\infty$

$A > 1$ $\qquad a_n = \frac{A^n}{n}$ (FORMA INDET. $\frac{\infty}{\infty}$)

VEDIAMO che $a_n \to +\infty$ ("VINCE" A^n)

<u>DIM.</u> $A = 1 + \delta$ con $\delta > 0$

$$A^n = (1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \overbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\delta^k}^{\geq 0}$$

(Binomio di Newton)

$$\geq 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 \qquad \forall n$$

$$\Rightarrow \frac{A^n}{n} \geq \frac{1}{n} + \delta + \underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\to +\infty}\delta^2 \to +\infty \Rightarrow \frac{A^n}{n} \to +\infty$$

ALTRO LIMITE $\frac{A^n}{n^2} \to +\infty$

$$A^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\delta^3 + \text{termini} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{A^n}{n^2} \geq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{\delta}{n}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{n-1}{n}\frac{\delta^2}{2}}_{\downarrow\, \frac{\delta^2}{2}} + \underbrace{\frac{(n-1)(n-2)}{n}}_{\downarrow\, +\infty}\frac{\delta^3}{6} \to +\infty$$

$$\frac{A^n}{n^2} \to +\infty$$

PIÙ IN GENERALE $\frac{A^n}{n^k} \to +\infty$ qualunque sia $k \in \mathbb{N}$

(idea: usare il Binomio di Newton fino al termine di grado $k+1$)

POSSO USARE UN ALTRO SISTEMA

Teorema 1 Sia a_n una successione: $a_n > 0$ $\forall n$

Supponiamo che esista $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

ALLORA se $\ell > 1$ $a_n \to +\infty$

se $\ell < 1$ $a_n \to 0$

Diamolo per buono per un momento. Se ne deduce subito che

$$a_n = \frac{A^n}{n^k} \to +\infty \qquad (\text{quando } A > 1). \qquad \text{INFATTI}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{A^{n+1}}{(n+1)^k}}{\frac{A^n}{n^k}} = \frac{\cancel{A^{n+1}}^{\,A}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{\cancel{A^n}} = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k}_{\downarrow \atop 1} \cdot A \to A$$

Dato che $A > 1$, dal Teorema ricavo $a_n \to +\infty$

PER GLI STESSI MOTIVI

$$\lim_{n\to\infty} n^k A^n = 0 \quad \text{se} \quad 0 < A < 1$$

__DIM.__ Dal teorema, ponendo $a_n = n^k A^n$, notando che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k A^{n+1}}{n^k \; A^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k A \to A \quad (<1)$$

__DUNQUE__ L'espressione "geometrica" A^n VINCE SU OGNI potenza n^k

---

Torniamo al Teorema (in sospeso...).

C'è un altro teorema collegato:

Teorema 2 Se $\{a_n\}$ con $a_n \geq 0$

e se esiste limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \qquad (\ell \geq 0)$$

ALLORA

se $\ell > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$

se $\ell < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

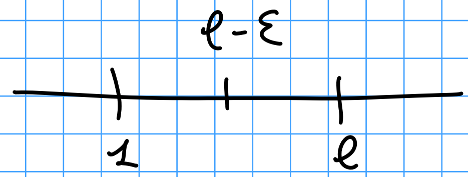
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \to 1$$

$$\frac{n+1}{n} \to 1$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\text{K VOLTE}} \to 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$$

Dim. Supponiamo $\ell > 1$. Prendo $\varepsilon = \dfrac{1+\ell}{2}$, di modo che

$$1 < \ell - \varepsilon < \ell$$



Dato che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ si ha

$\sqrt[n]{a_n} \geq \ell - \varepsilon$ definitivamente; elevo alla n

$a_n \geq (\ell - \varepsilon)^n$ definitivamente

Dato che $\ell - \varepsilon > 1$ la succ. (geometrica) $(\ell-\varepsilon)^n$ DIVERGE A $+\infty$

$\Rightarrow$ $a_n \to +\infty$

L'ALTRO CASO $(\ell < 1)$ si ottiene dal fatto che

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \to \frac{1}{\ell} > 1 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty \Rightarrow a_n \to 0$$

NOTA il teorema vale anche se $\ell = +\infty$ (la dim va adattata)

Teorema (di Cesàro) Se $\{a_n\}$ è una succ. di numeri >0

e se esiste $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R}^*)$

ALLORA esiste $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

(se lo dimostro $\Rightarrow$ ottengo anche il teorema 1)

Dim. Dimostro il caso $\ell \in \mathbb{R}$ (si può fare anche con $\ell = \pm\infty$ ....)

Fisso $\varepsilon > 0$. So che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, dunque esiste n_0 :

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

In particolare

$$\ell - \varepsilon < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \ell + \varepsilon \qquad \text{cioè}$$

$$(\ell - \varepsilon)\, a_{n_0} < a_{n_0+1} < (\ell + \varepsilon)\, a_{n_0}$$

Stesso discorso per n_0+1 :

$$(\ell - \varepsilon)\, a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < (\ell + \varepsilon)\, a_{n_0+1} <$$

ma riutilizzando il caso n_0, dove

$$a_{n_0}(\ell - \varepsilon)(\ell - \varepsilon) < a_{n_0+2} < (\ell+\varepsilon)(\ell+\varepsilon)\, a_{n_0} = (\ell+\varepsilon)^2 a_{n_0}$$

ITERANDO

$$a_{n_0}(\ell - \varepsilon)^3 \leq a_{n_0+3} \leq (\ell+\varepsilon)^3 a_{n_0}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{(\ell - \varepsilon)^k a_{n_0} \leq a_{n_0+k} \leq (\ell+\varepsilon)^k a_{n_0} \qquad \forall k \geq 1}$$

Le posso anche scrivere (ponendo $n_0 + k = n$)

$$a_{n_0}(\ell - \varepsilon)^{n-n_0} \leq a_n \leq (\ell+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \qquad \forall n \geq n_0 + 1$$

Faccio $\sqrt[n]{}$ di tutto:

$$\sqrt[n]{a_{n_0}}\,(\ell-\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (\ell+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}}\sqrt[n]{a_{n_0}}$$ cioè

$$(\ell-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}}\,(\ell+\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0+1$$

DIAMO PER BUONO (lo farò prossima volta) che

se $A > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{A} \to 1$

Ne segue che $\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}} \to 1$ e $\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} \to 1$

$$\Rightarrow (\ell-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n}}} \to \ell-\varepsilon \quad \text{e} \quad (\ell+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} \to \ell+\varepsilon$$

Dalla def di limite

$$(\ell-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}}} > \ell-2\varepsilon \quad \text{per } n \geq n_0 \text{ opportuno}$$

$(\ell+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}} \leq \ell + 2\varepsilon$ per $n \geq n_1$ opportuno

DUNQUE per $n \geq n_1$ (n_1 abbastanza grande)

$$\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + 2\varepsilon$$

(se mettevo $\frac{\varepsilon}{2}$ prima, trovavo ε)

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario ho verificato che $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$