Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Settima lezione, 21 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Def. di successione   Chiamiamo "SUCCESSIONE" di numeri reali una funzione

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (IN PARTENZA CI SONO GLI INTERI $\mathbb{N}$).

NOTAZIONE: i valori $a(n)$, detti anche "elementi della successione" si indicano con

$$a_0 \;(= a(0)), \quad a_1 \;(= a(1)), \quad \dots, \quad a_n \;(= a(n))$$

e la successione, nella sua interezza, si indica con $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

PIÙ IN GENERALE chiamiamo successione una a definita sugli interi maggiori o eguali a un certo n_0 in $\mathbb{N}$.

In questo caso scriviamo $\{a_n\}_{n \geq n_0}$.

ESEMPI

- $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione i cui elementi sono

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8, \quad \dots, \quad a_n = 2^n$$

- $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ è la succ. i cui elementi sono $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$ ..., $a_n = 1/n$
- $\left\{\frac{1}{n-5}\right\}_{n \geq 6}$ è la succ. i cui elementi sono $a_6 = 1$, $a_7 = \frac{1}{2}$, ...

DEF: Se $p(n)$ è una proprietà (su $\mathbb{N}$) dirò che

"$p(n)$ VALE DEFINITIVAMENTE".

se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ per cui

$p(n)$ VALE $\forall n \geq n_0$

ESEMPI

- $n \geq 10$ VALE DEFINITIVAMENTE

(prendo $n_0 = 10$, da n_0 in poi la proprietà è vera)

- Siano $a > 0$, b, $c \in \mathbb{R}$. Allora

$a n^2 + b n + c \geq 0$ DEFINITIVAMENTE

IN EFFETTI LA DISUGUAGLIANZA $ax^2 + bx + c \geq 0$

VALE
- per ogni x se $b^2 - 4ac < 0$
- per $x \geq x_1$ dove $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. se $b^2 - 4ac \geq 0$

(anche se $x \leq x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ma non ci serve)

Allora se $n_0 = [x_1] + 1$ la proprietà $a n^2 + bn + c \geq 0$
vale sicuramente per $n \geq n_0$

DEFINITIVAMENTE $\longleftrightarrow$ "per n abbastanza grande"

- DEFINITIVAMENTE

$$n^4 \geq 1.0000 n^2$$ (n^4 VA PIÙ VELOCE DI $10000 n^2$)

(o anche $n^4 \geq a n^2$)

INFATTI $n^4 - 10000 n^2 \geq 0 \iff n^2 (n^2 - 10.000) \geq 0$

$$\iff n^2 \geq 10.000 \iff n \geq 100$$

<u>Def. (di limite finito)</u> Sia $\{a_n\}$ e $\ell \in \mathbb{R}$.

Dico che $\{a_n\}$ tende a ℓ per n che tende
a più infinito, e scrivo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

CIOÈ

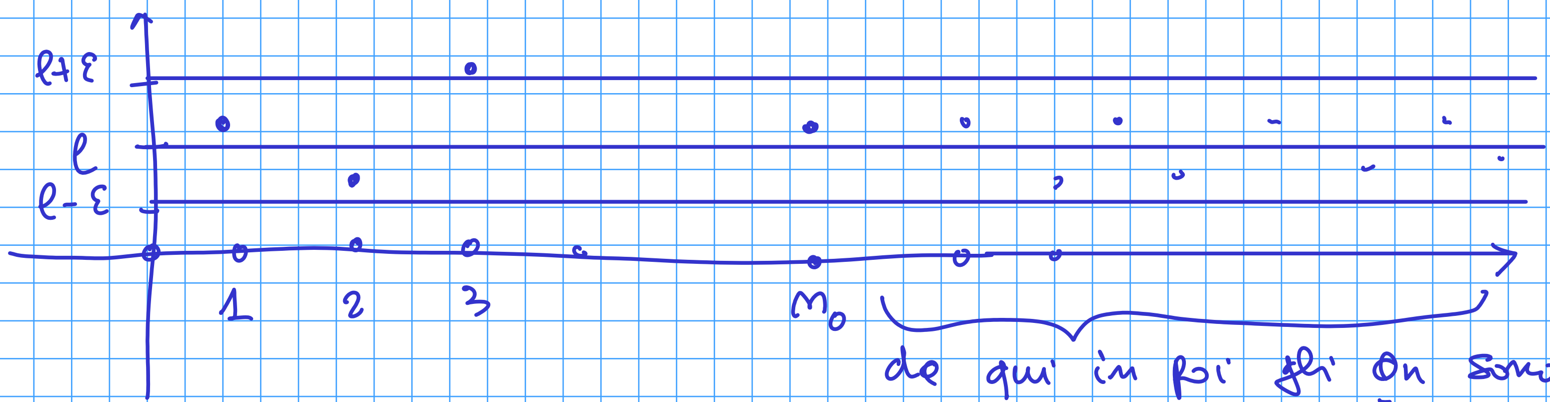
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0$ t.c. che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

[NOTA CHE $|a_n - \ell| < \varepsilon$ EQUIVALE A $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$]

<u>IDEA</u>: a_n si avvicina a ℓ quando n diventa grande:

fissato $\varepsilon > 0$ (un "errore") ad arbitrio a_n è vicino a ℓ a meno di ε se n è sufficientemente grande.



da qui in poi gli a_n sono tutti nella striscia $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$

<u>ESEMPIO</u> Vediamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Per vederlo devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$

$(\ast)$ $\quad \underbrace{-\varepsilon < \frac{1}{n}}_{\text{VERA } \forall n} \underbrace{< \varepsilon}_{\text{VERA SE } n > \frac{1}{\varepsilon}}$ definitivamente

Se prendo $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, n_0 è un intero $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ quindi VALE $(\ast)$

<u>NOTAZIONI</u> Scriveremo spesso $\boxed{a_n \to \ell}$ per indicare

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ (è sottinteso $n \to +\infty$; nel caso delle succ. i limiti si fanno solo per $n \to +\infty$)

(quindi $\frac{1}{n} \to 0$)

<u>NOTA</u> 1) Il risultato del limite è un numero che dipende dagli INFINITI valori di $\{a_n\}$

PERALTRO Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni e

$a_n = b_n$ definitivamente

allora $a_n \to \ell \iff b_n \to \ell$

NOTA 2 Non tutte le successioni hanno limite (lo vedremo meglio più avanti)

Def. (limiti infiniti) $\{a_n\}$ successione. Dico che $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ $(-\infty)$ per n che tende a $+\infty$

Se:

per ogni $M \in \mathbb{R}$ $a_n \geq M$ definitivamente

($a_n \leq M$ definitivamente)

cioè: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$

$(a_n \leq M \quad \forall n \geq n_0)$

ESEMPI

- $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ (FACILE: dato M prendo $n_0 = [M] + 1$)

- Se $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} (a n^2 + bn + c) = +\infty$$

INFATTI se $M \in \mathbb{R}$ VALE

$$a n^2 + bn + c \geq M \quad \text{definitivamente}$$

$$\Updownarrow$$

$$a n^2 + bn + c - M \geq 0 \quad \text{definitivamente}$$

PER QUANTO DETTO PRIMA CIÒ È VERO!

PROPRIETÀ DEL LIMITE

TEOREMA (UNICITÀ DEL LIMITE): Se $\{a_n\}$ è una succ.
Se $a_n \to l_1$ e $a_n \to l_2$ ALLORA $l_1 = l_2$

QUI l_1, l_2 sono in $[-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = \mathbb{R}^*$

DIM. Caso reale: $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ $a_n \to l_1$, $a_n \to l_2$

Se fosse $l_1 \neq l_2$ posso supporre $l_2 > l_1$ e prendere

$\varepsilon = \frac{1}{3}(l_2 - l_1) > 0$. Per la def. di limite:

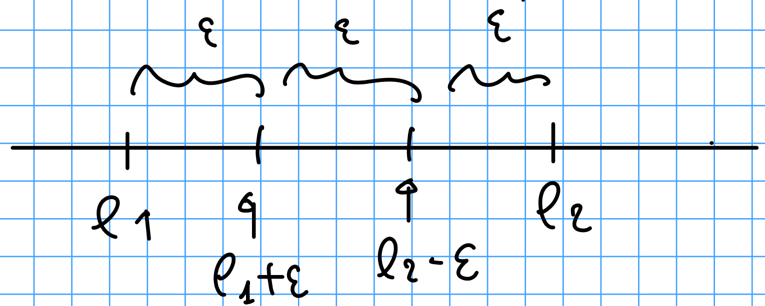
$$\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$
$$\ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_2 + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

$$\Downarrow$$

definitivamente valgono entrambe
(prendendo il max degli n_0)

Ma allora:

$$\ell_2 - \frac{\ell_2-\ell_1}{3} < \ell_2 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2-\ell_1}{3}$$



facendo i calcoli(*) (o guardando il disegno) si vede che $\ell_1+\varepsilon<\ell_2-\varepsilon$

dunque è IMPOSSIBILE che $\ell_1+\varepsilon < a_n < \ell_2 - \varepsilon$

(*) verificare che $\ell_1 + \frac{\ell_2-\ell_1}{3} < \ell_2 - \frac{\ell_2-\ell_1}{3}$ (dato che $\ell_2 > \ell_1$)

$\Rightarrow \quad \ell_1 = \ell_2$

CASO $\ell_2=+\infty$ $\ell_1\in\mathbb{R}$

Se fosse $a_n \to +\infty$ e
$a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

avrei: $\ell-1 \le a_n \le \ell+1$ definitivamente
(def di $a_n\to\ell$ con $\varepsilon=1$)

e anche $a_n \geq \ell+2$ definitivamente
(def di $a_n\to+\infty$ con $M=\ell+2$)

a_n non può essere contemporaneamente $\le \ell+1$ e $\ge \ell+2$

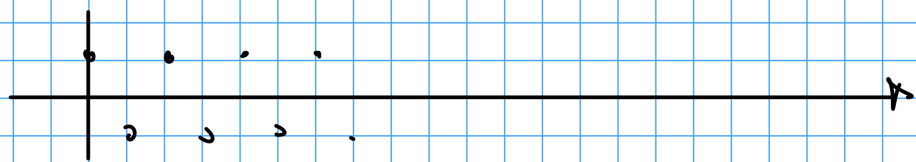
Ma allora devono valere entrambe (definitivamente) $\Rightarrow$ ASSURDO

MANCA IL CASO $\ell_1=+\infty$, $\ell_2=-\infty$ (che lasciamo al lettore ☺)

NON SEMPRE IL LIMITE ESISTE: PER ESEMPIO

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$a_0=1,\ a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=-1\ \dots,\ a_n=(-1)^n$



DICO CHE $\{a_n\}$ NON HA LIMITE.

Per assurdo supponiamo che $a_n \to \ell$, con $\ell \in \mathbb{R}$ (poi si può anche considerare $\ell = \pm\infty$ ma non lo facciamo)

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Deve esistere n_0 tale che

$$\boxed{\ell - \frac{1}{2} \leq a_n \leq \ell + \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0}$$

Sia $n \geq n_0$ pari $\Rightarrow$ $1 \leq \ell + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq \ell$

Sia $n \geq n_0$ dispari $\Rightarrow$ $\ell - \frac{1}{2} \leq -1 \iff \ell \leq -\frac{1}{2}$!!

IMPOSSIBILE

NON PUÒ ESISTERE UN TALE ℓ