Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Sesta lezione, 15 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Ancora su $\mathbb{N}$. Ricordiamo che

$\mathbb{N}$ = "minimo insieme induttivo di $\mathbb{R}$", cioè:

(1) $\mathbb{N}$ è induttivo ($0 \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$)

(2) se $A \subset \mathbb{R}$ è induttivo $\Rightarrow$ $\mathbb{N} \subset A$

In particolare se A è induttivo, $A \subset \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A = \mathbb{N}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

$$\boxed{\text{se } A \subset \mathbb{N},\ 0 \in A,\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A \quad \text{ALLORA } A = \mathbb{N}}$$

oppure: se $p(n)$ è una proprietà definita per $n \in \mathbb{N}$ e se

$$\begin{cases} p(0) \text{ è vera} \\ p(n) \text{ vera} \Rightarrow p(n+1) \text{ vera} \end{cases} \qquad \text{ALLORA} \quad \forall n \ p(n) \text{ vera.}$$

ABBIAMO VISTO

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq 0$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$ $\quad n-1 \in \mathbb{N}$

INOLTRE ABBIAMO USATO SPESSO:

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ non c'è nessun $m \in \mathbb{N}$ con $n < m < n+1$

o anche $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$ $\leftarrow p(n)$

Lo posso dimostrare facilmente per induzione:

$\boxed{p(0)}$ = $]0,1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$

Se ci fosse m intero con $0 < m < 1$, dato che $m \neq 0$

$m-1 \in \mathbb{N}$ (per e b)); ma $m-1 < 0$ e questo

contraddice (a).

$\boxed{p(n) \Rightarrow p(n+1)}$ Suppongo di sapere che $]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$

e ne deduco che $]n+1, n+2[\cap \mathbb{N} = \emptyset$. Se ci fosse

m intero con $n+1 < m < n+2$ sarebbe $m \neq 0 \Rightarrow m-1 \in \mathbb{N}$,

ma $n < m-1 < n+1$, contraddice l'ipotesi "induttiva"

FINE DIM.

(d) Ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ $A \neq \emptyset$ ha minimo

<u>Analogamente</u> • Se $A \subset \mathbb{Z}$ e A limitato inf $\Rightarrow A$ ha minimo

• Se $A \subset \mathbb{Z}$ e A limitato sup $\Rightarrow A$ ha max.

(no dim.)

Alcune altre "varianti" del principio di ind.

Se $p(n)$ è una proprietà definita per $n \in \mathbb{N}$ e se $n_0 \in \mathbb{N}$.

(1) Suppongo che

- $p(n_0)$ VERA
- $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

ALLORA $p(n)$ VERA $\forall n \geq n_0$

(2) Più in generale se

- $p(n_0)$ VERA
- $p(n_0), p(n_0+1), \dots, p(n) \Rightarrow p(n+1)$

ALLORA VALE $p(n)$ $\forall n \geq n_0$

SEMPRE COLLEGATO CON L'INDUZIONE: DEFINIZIONI RICORSIVE

Vediamo prima degli esempi

POTENZA A^n di solito si definisce dicendo

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{n \text{ VOLTE}}$$

Si dovrebbe in realtà dire

$$\boxed{\begin{array}{l} A^0 = 1 \\ A^{n+1} = A^n \cdot A \end{array}}$$

RICORSIVA: A^{n+1} È ESPRESSO IN TERMINI DI A^n

Per esempio $2^5 = 2^4 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$
$2^0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

L'INDUZIONE GARANTISCE CHE "prima o poi il procedimento finisce" –

FATTORIALE Def. ricorsiva:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n!)(n+1) \end{cases}$$

IN GENERALE Ho una funzione reale F di due variabili

$F(x, n)$ con $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad (F : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R})$ e un $x_0 \in \mathbb{R}$

Allora esiste unica una $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \varphi(0) = x_0 \\ \varphi(n+1) = F(\varphi(n), n) \end{cases}$$

φ E' DEFINITA RICORSIVAMENTE

Nel caso della potenza (di base A) $F(X, n) = X \cdot A$ (non dipende da n)
$x_0 = 1$

Nel caso del fattoriale $F(x, n) = x \cdot (n+1)$

ALTRO ESEMPIO:
$$\begin{cases} \varphi(0) = x_0 \\ \varphi(n+1) = \varphi(n)^2 \end{cases} \leftarrow \boxed{\text{DEF. DI } \varphi}$$

Vediamo i primi valori di φ:

$n=0 \quad \varphi(0) = x_0$

$n=1 \quad \varphi(1) = \varphi(0)^2 = x_0^2$

$n=2 \quad \varphi(2) = \varphi(1)^2 = (x_0^2)^2 = x_0^4$

$\varphi(3) = \varphi(2)^2 = (x_0^4)^2 = x_0^8$

SEMBREREBBE $\boxed{\varphi(n) = x_0^{2^n}}$

PER DIMOSTRARE LA FORMULA SI DEVE USARE L'INDUZIONE

LA PROPRIETÀ $p(n)$ DICE $\varphi(n) = x_0^{2^n} \quad \left(= x_0^{(2^n)}\right)$

PASSO ZERO $p(0)$ DIVENTA $x_0 = x_0^{2^0} \quad (= x_0^1 = x_0)$ VERA

PASSO INDUTTIVO Se so che $\varphi(n) = x_0^{2^n}$, uso LA DEF. $\Rightarrow$

$$\varphi(n+1) = (\varphi(n))^2 = \left(x_0^{2^n}\right)^2 = x^{2^n \cdot 2} = x_0^{2^{n+1}}$$

VERA $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

DUNQUE $\varphi(n) = x_0^{2^n} \quad \forall n$

IN GENERALE NON È DETTO CHE SI POSSA TROVARE L'ESPRESSIONE ESPLICITA DI $\varphi(n)$ (DIPENDENTE SOLO DA n)

CONCLUDIAMO CON UN RISULTATO SULLE SOMME DI INTERI

FATTO Se $K \in \mathbb{N}$ l'espressione

$$P_K(n) := \sum_{i=0}^{n} i^K \quad \left(0^K + 1^K + 2^K + \cdots + n^K \right)$$

È UN POLINOMIO (IN n) DI GRADO $K+1$

esempi

$$\sum_0^n i = \frac{n(n+1)}{2} \to \text{polinomio di grado } 2$$

$$\sum_0^n i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)\,n}{6} \to \text{polinomio di grado } 3$$

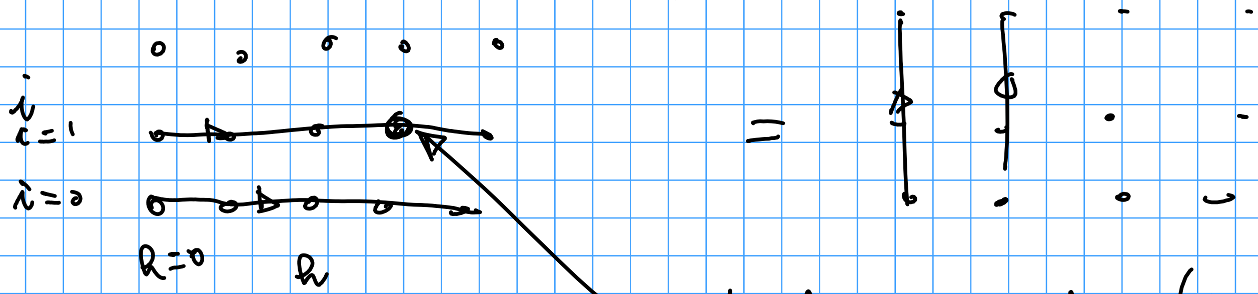
DIM. PARTIAMO DA

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)^{K+2} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{h=0}^{K+2} \binom{K+2}{h} 1^{K+2-h} \, i^h \right) =$$

(BINOMIO DI NEWTON)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{h=0}^{k+2}\binom{k+2}{h} i^h = \sum_{h=0}^{k+2}\sum_{i=0}^{n}\binom{k+2}{h} i^h =$$

(proprietà commutativa della somma)



addendo di indici (i, h)

$$\sum_{h=0}^{k+2}\binom{k+2}{h}\sum_{i=0}^{n} i^h = \sum_{h=0}^{k+2}\binom{k+2}{h}P_h(n)$$

HO TROVATO

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{k+2} = \sum_{h=0}^{k+2}\binom{k+2}{h}p_h(n) = \sum_{h=0}^{k}\binom{k+2}{h}p_h(n) + \binom{k+2}{k+1}p_{k+1}(n) + \binom{k+2}{k+2}p_{k+2}(n) =$$

$$= \boxed{\sum_{h=0}^{k}\binom{k+2}{h}p_h(n) + (k+2)p_{k+1}(n) + p_{k+2}(n)}$$

"(1)"

PERALTRO (scalando gli indici)

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)^{k+2} = \sum_{i=1}^{n+1} i^{k+2} = \sum_{i=0}^{n+1} i^{k+2} = \sum_{i=0}^{n} i^{k+2} + (n+1)^{k+2}$$

(se $i=0$ $i^{k+2}=0$)

$$= \boxed{p_{k+2}(n) + (n+1)^{k+2}}$$

$\parallel$

(2)

quindi (1) = (2)

Se semplifico $p_{k+2}(n)$ trovo

$$(n+1)^{k+2} = \underbrace{(k+2)\, p_{k+1}(n)}_{\text{LO RICAVO}} + \sum_{h=0}^{k} \binom{k+2}{h} p_h(n)$$

FORMULA RICORSIVA IN K

(*) $$\boxed{p_{k+1}(n) = \frac{1}{k+2}\left[(n+1)^{k+2} - \sum_{h=0}^{k} \binom{k+2}{h} p_h(n)\right]} =$$

$$\frac{1}{k+2}\left[(n+1)^{k+2} - p_0(n) - (k+2)\, p_1(n) - \binom{k+2}{2} p_2(n) - \dots - \binom{k+2}{k} p_k(n)\right]$$

A QUESTO PUNTO L'AFFERMAZIONE

$P(k)$ = " $p_k(n)$ è un polinomio di grado $k+1$ "

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE

PASSO ZERO $\quad \sum_{i=0}^{m} 1 = m+1$ che è un pol. di grado 1 (VERA)

PASSO INDUTTIVO $\quad$ so che p_0 di grado 1 ... p_k di grado $k+1$

$\Rightarrow$ USANDO LA FORMULA ☆

$$p_{k+2}(n) = \frac{1}{k+2}\Big[\underbrace{\overbrace{(m+1)^{k+2}}^{\text{di grado } k+2} - \text{SOMMA DI POLINOMI DI GRADO AL PIÙ } k+1}_{\text{DI GRADO } k+2}\Big]$$

DUNQUE $P(k)$ VERA $\forall k \in \mathbb{N}$.

DALLA FORMULA ☆ si vede anche:

$$p_k(m) = \frac{m^{k+1}}{k+1} + \text{termini di grado} \leq k$$

Vedremo più avanti che, se $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha > -1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} =: p_{\alpha}(n) \qquad \left(\text{se } \alpha = \frac{1}{2} \quad p_{\frac{1}{2}}(n) = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \right)$$

ALLORA $p_{\alpha}(n) = \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ + "termini che crescono più lentamente di $n^{\alpha+1}$"

NOTA: $p_{\alpha}(n)$ "ESPLODE" al crescere di n anche per gli $\alpha \in]-1, 0[$, che sono < 0, per esempio $\alpha = -\frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ ESPLODE AL CRESCERE DI n

(se è vero ciò che ho scritto sopra)

$$\left(\begin{aligned} p_1(n) &= 1 + 2 + \dots + n \\ p_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \\ p_{\alpha}(n) &= 1^{\alpha} + \dots + n^{\alpha} \end{aligned} \right)$$

ABBIAMO VISTO che $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} A^i = \frac{1 - A^{n+1}}{1 - A}$ $\left(\begin{array}{l} \forall A \in \mathbb{R},\ A \neq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right)$

PRENDO $\underline{0 < A < 1}$ Voglio vedere cosa succede al crescere di n

(NOTA CHE $S(n) = \sum_{i=0}^{n} A^i = (1 + A + A^2 + \dots + A^n)$, cresce se n cresce: $S(n+1) \geq S(n)$; dato che $A^i \geq 0 \ \forall i$)

DICO CHE $\sup_{n \in \mathbb{N}} S(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} A^i = \frac{1}{1-A}$

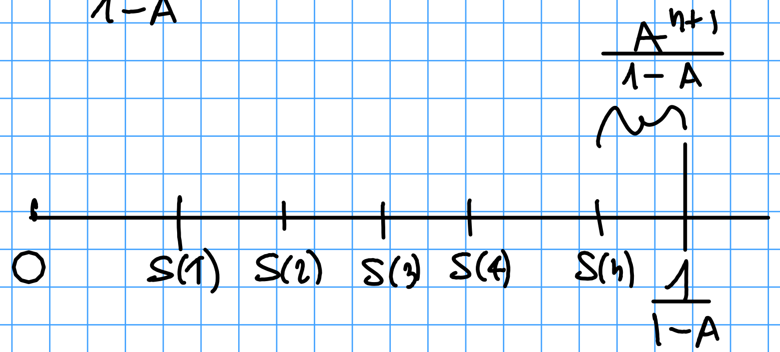
DIM. Notiamo che se $0 < A < 1$ $1 - A > 0$ dunque

$$S(n) = \frac{1}{1-A} - \frac{A^{n+1}}{1-A} \leq \frac{1}{1-A}$$

Dunque $\frac{1}{1-A}$ è un maggiorante di $S(n)$, per cui $\boxed{\sup_n S(n) \leq \frac{1}{1-A}}$

$\Downarrow$

I° proprietà del sup



Vediamo che vale "=". Per farlo devo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n$ per cui

$$S(n) > \frac{1}{1-A} - \varepsilon$$

(II° prop del sup)

Perché ciò sia vero deve essere

$$\cancel{\frac{1}{1-A}} - \frac{A^{n+1}}{1-A} > \cancel{\frac{1}{1-A}} - \varepsilon \iff \varepsilon > \frac{A^{n+1}}{1-A}$$

$$\iff A^{n+1} < (1-A)\varepsilon$$ (devo trovare n che verifichi questa)

$$\iff \left(\frac{1}{A}\right)^{n+1} > \frac{1}{\varepsilon(1-A)}$$

DATO CHE $A < 1 \Rightarrow \frac{1}{A} > 1$ POSSO SCRIVERE $\frac{1}{A} = 1+\delta$

CON $\delta > 0$ $\left(\delta = \frac{1}{A} - 1\right)$. RISCRIVENDO LA DIS.

(*) $$(1+\delta)^{n+1} > \frac{1}{\varepsilon(1-A)}$$

MA IO SO CHE $(1+\delta)^{n+1} \geq \boxed{1+(n+1)\delta}$ (BERNOULLI)

ALLORA SE (**) $\boxed{1+(n+1)\delta \geq \frac{1}{\varepsilon(1-A)}}$ $\Rightarrow$ vale (*)

PER TROVARE n che verifica (**) basta $n+1 \geq \left(\frac{1}{\varepsilon(1-A)} - 1\right)\frac{1}{\delta}$

(che mi dà un $n \in \mathbb{N}$) OK

DUNQUE $\boxed{\sup S(n) = \frac{1}{1-A}}$

"MORALMENTE $\sum_{i=0}^{\infty} A^i = \frac{1}{1-A}$"

Per esempio "$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$" (cioè $\sup_m \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$) $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

POSSIAMO ALLORA INTRODURRE gli "allineamenti decimali" (eventualmente con infinite cifre)

RICORDO CHE se $x \in \mathbb{R}$ $[x] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$

PRENDO $x \geq 0$ (in $\mathbb{R}$).

Supponiamo di avere $\alpha_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$

LO scritto $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n$ significa $\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{10^i}$

$$\left(= \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} \right)$$

Se ora $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ $\alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ sono infinite cifre tra 0 e 9 pongo:

$$\boxed{\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots := \alpha_0 + \sup_m \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{10^i} = \sup_m \left(\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n\right)} \quad \text{DEF}$$

FATTO Se $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$ sono come sopra

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \leq \alpha_0 + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

DIM.

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{10^i} \leq \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} =$$

$$\alpha_0 + \frac{9}{10} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{10^{i-1}} = \alpha_0 + \frac{9}{10} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{10^i} =$$

$$\alpha_0 + \frac{9}{10} \left(\frac{1 - 1/10^n}{1 - 1/10} \right) \leq \alpha_0 + \frac{9}{10} \frac{1}{1 - 1/10} = \alpha_0 + \frac{9}{10} \frac{1}{\frac{9}{10}} = \alpha_0 + 1$$

DUNQUE LA DEF. SOPRA RESTITUISCE UN NUMERO REALE (NON $+\infty$)

OSS. $0,999 \dots \quad 1$

INFATTI

$$\sup_m \sum_{i=1}^{m} \frac{9}{10^i} = \sup_m \frac{9}{10} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{i-1}} = \frac{9}{10} \sup_m \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{\text{(VISTO PRIMA) } \frac{1}{1-1/10}}$$

$$= \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

ANALOGAMENTE $\quad \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k\, 9\,9\,9 \qquad \alpha_k < 9$

$= \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots (\alpha_k + 1)$

$1,357\,999 = 1,358$

CONVENZIONE $\quad \alpha_0, \underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_k}_{\text{ANTIPERIODO}} \overline{\underbrace{\beta_1 \cdots \beta_h}_{\text{PERIODO}}} = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_k \underbrace{(\beta_1 \cdots \beta_h)(\quad)(\quad)}_{\text{infinite volte}}$

(non esauriscono tutti gli allineamenti)

FATTI (senza dim.)

Un allineamento è periodico $\Longleftrightarrow$ rappresenta un numero razionale

(e si può trovare la formula)

per esempio $\quad 0,\overline{23} = \sup_m \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{}{10^m} \right)$

$$= \frac{2 \cdot 10 + 3}{10^2} + \frac{1}{10^2}\frac{23}{10^2} + \frac{1}{10^4}\frac{23}{10^2}$$

$$= \frac{23}{10^2}$$

$$\text{"} = \text{"}\ \frac{23}{10^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2i}} = \frac{23}{100} \sum \frac{1}{(100)^i}$$

$$= \frac{23}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{23}{100}\,\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{99}$$

(con un po' di intuito si ricavano le regole generali)

QUINDI DATO UN ALLINEAMENTO $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$

$\Rightarrow$ TROVO $x = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots = \sup_n \ldots$

rappresentato dall'allineamento

VICEVERSA DATO $x \in \mathbb{R}$ $(x \geq 0)$ posso costruire un allineamento che rappresenti x ??

SI FA COSÌ :

$$\alpha_0 = [x]$$

$$\alpha_1 = \left[(x - \alpha_0)10\right]$$

$$\alpha_2 = \left[(x - \alpha_0,\alpha_1)10^2\right]$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{k+1} = \left[(x - \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_k)\cdot 10^{k+1}\right]$$

($x = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$[x] = 1 = \alpha_0$

$\alpha_1 = \left[\left(\frac{3}{2} - 1\right)10\right] = \left[\frac{1}{2}\cdot 10\right] = [5] = 5$

DOMANDA : tale allineamento "rappresenta" x ? **SÌ**

Infatti: dalla costruzione di $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_K \ldots$

$$\alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_K \leq x < \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_K + \frac{1}{10^{K+1}}$$

da cui si ricava (con un po' di pazienza) che

$$\sup_K \alpha_0\,\alpha_1 \ldots \alpha_K = x$$

<u>NOTA</u> Il procedimento indicato sopra non produce mai tutti 9 da un certo K in poi:

Se trovassi $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \underset{\neq 9}{\alpha_K}\,\overline{9} \Rightarrow x = \alpha_0, \alpha_1 \ldots (\alpha_K + 1)$

MA ALLORA AL PASSO K TROVO $\alpha_K + 1$ e non α_K

NE SEGUE (eventualmente con qualche verifica..)

$\forall x \in \mathbb{R}$ esiste uno e uno solo all. decimale "proprio"

(proprio → NON CI SONO TUTTI 9 DA UN CERTO K in POI)

SE VOLESSI POTREI COSTRUIRE $\mathbb{R}$ come l'insieme degli allineamenti decimali propri (DOVREI ALLORA DEFINIRE $x+y$ e $x \cdot y$ in termine degli allineamenti di x e di y ...)

ESEMPIO $\quad x = \frac{1}{3} \quad$ allora $\quad \alpha_0 = \left[\frac{1}{3}\right] = 0$

$$\alpha_1 = \left[\left(\frac{1}{3} - \alpha_0\right)10\right] = \left[\frac{10}{3}\right] = \left[3 + \frac{1}{3}\right] = 3$$

$$\alpha_2 = \left[\left(\frac{1}{3} - \alpha_0,\alpha_1\right)10^2\right] = \left[\left(\frac{1}{3} - 0{,}3\right)100\right] = \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right)100\right] = \left[\frac{10}{3}\right] = 3$$

$\vdots$

$$\alpha_k = \left[\left(\frac{1}{3} - 0{,}\overbrace{333\ 3}^{k-1}\right)10^k\right] = \ \cdots \ = 3$$

QUINDI $\quad \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$