Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

quinta lezione, 14 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Abbiamo detto che la funzione $f(x) = x^2$, ristretta alle $x \geq 0$, ha come immagine $[0, +\infty[$.

$$f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$$

CIOÈ $\forall y \geq 0 \quad \exists x \geq 0$ tale che $x^2 = y$ $\quad (*)$

(da questo si costruisce la funzione "radice quadrata")

Per $(*)$ si prende

$$\lambda = \sup \{ x \geq 0 \text{ tale che } x^2 \leq y \}$$

e si fa vedere che $\lambda^2 = y$

VOGLIO DIMOSTRARE QUANTO SCRITTO SOPRA

Ho $y \geq 0$ e ho costruito $A_y = \{ x : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq y \}$

OSSERVO CHE

- $A_y \neq \emptyset$, dato che $0 \in A_y$
- $\sup A_y < +\infty$ (A_y è limitato superiormente)

Per vederlo devo trovare un maggiorante per A_y

Posso prendere per questo $\boxed{\bar{\lambda} = \max(1, y) =}$

Si vede che:

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } y \leq 1 \\ y & \text{se } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} \geq x \quad \forall x \in A_y$$

(DEVO DISTINGUERE $y \leq 1$ / $y \geq 1$ ....)

$\Rightarrow \bar{\lambda}$ è maggiorante per A_y $\Rightarrow$

$$\sup A_y \leq \bar{\lambda}$$

- DUNQUE HA SENSO DEFINIRE $\lambda := \sup A_y \ (\leq \bar{\lambda})$

E' OVVIO CHE $\lambda \geq 0$

DICO CHE $\underline{\underline{\lambda^2 = y}}$. Se NO DEVE VALERE

$$\lambda^2 < y \quad \text{oppure} \quad \lambda^2 > y$$

CONSIDERIAMO IL CASO $\boxed{\lambda^2 < y}$ (vediamo che non può essere vero)

Allora $\boxed{\exists\ \varepsilon > 0 \text{ tale che } (\lambda + \varepsilon)^2 < y}$

DIM.

Prendiamo un numero $\varepsilon > 0$ e anche $\varepsilon < 1$ e vediamo quanto fa $(\lambda + \varepsilon)^2$. Viene

$$(\lambda + \varepsilon)^2 = \lambda^2 + 2\lambda\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \lambda^2 + 2\bar{\lambda}\varepsilon + \varepsilon =$$

$\lambda \leq \bar{\lambda}$ $\qquad$ $\varepsilon < 1$

$\lambda^2 + \varepsilon(2\bar{\lambda}+1)$ (VERO SE $0<\varepsilon<1$)

SE TROVO ε PER CUI $\boxed{\lambda^2 + \varepsilon(2\bar{\lambda}+1) < y}$
SONO A POSTO (ANCHE $(\lambda+\varepsilon)^2 < y$)

PER QUESTO BASTA PRENDERE $0<\varepsilon< \dfrac{y-\lambda^2}{2\bar{\lambda}+1}$ (e $\varepsilon<1$)

(che è un numero >0 dato che $y>\lambda^2$).

Quindi se $0<\varepsilon<\min\left(1, \dfrac{y-\lambda^2}{2\bar{\lambda}+1}\right)$

$\Rightarrow (\lambda+\varepsilon)^2 < y$

MA ALLORA $\lambda+\varepsilon \in A_y$ e $\lambda+\varepsilon>\lambda$

ASSURDO perché $\lambda = \sup A_y$

<u>CASO $\lambda^2 > y$</u> In questo caso posso trovare

$\varepsilon>0$ tale che $(\lambda-\varepsilon)^2 > y$.. VEDIAMO COME.

Prendo $\varepsilon>0$. Calcolo $(\lambda-\varepsilon)^2 = \lambda^2 - 2\lambda\varepsilon + \varepsilon^2$

$\geq \lambda^2 - 2\lambda\varepsilon \geq \lambda^2 - 2\bar{\lambda}\varepsilon$ $(\lambda \leq \bar{\lambda} \Rightarrow -\lambda \geq -\bar{\lambda})$

Cerco ε in modo che $\lambda^2 - 2\bar{\lambda}\varepsilon > y \iff$

$\varepsilon < \dfrac{\lambda^2 - y}{2\bar\lambda}$ (positivo perché $\lambda^2 > y$)

Posso prendere allora ε tra 0 e $\dfrac{\lambda^2 - y}{2\bar\lambda}$

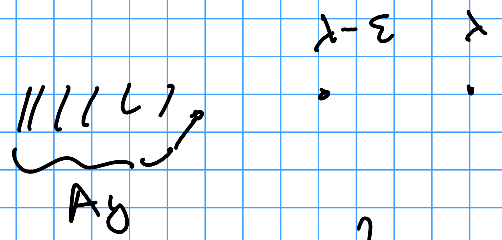
$\Rightarrow \quad (\lambda - \varepsilon)^2 > y$.

MA ALLORA $\lambda - \varepsilon \notin A_y \Rightarrow$

$\forall x \geq \lambda - \varepsilon$ si ha $x \notin A_y \Rightarrow$

$\lambda - \varepsilon$ è maggiorante per A_y. $\Rightarrow \lambda \leq \lambda - \varepsilon$

ASSURDO



QUINDI $\lambda^2 = y$!!

IN PARTICOLARE IN $\mathbb{R}$ C'È UN NUMERO λ tale che $\lambda^2 = 2$

A DIFFERENZA DI $\mathbb{Q}$!!

DATO CHE $\mathbb{R}$ è stato introdotto $\Rightarrow$ possiamo INDIVIDUARE L'INSIEME $\mathbb{N}$ dei NUMERI NATURALI

Def. Dato A sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dico che A è induttivo se vale la seguente proprietà:

$$\begin{cases} 0 \in A \\ \text{se } x \in A \quad \text{anche } x+1 \in A \end{cases}$$

ESEMPI (BANALI)

- $\mathbb{R}$ è induttivo
- $[0, +\infty[$ è induttivo
- $[-1, +\infty[$ è induttivo
- $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ è induttivo

DEF Chiamo $\mathbb{N}$ l'intersezione di tutti i possibili insiemi induttivi

[Si vede che $\mathbb{N}$ è induttivo ed è "il più piccolo insieme induttivo" nel senso che

se A è induttivo $\Rightarrow \mathbb{N} \subset A$]

CARATTERIZZAZIONE DI $\mathbb{N}$

Da questa def. si posso dedurre le proprietà di $\mathbb{N}$

- Se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0$: Dato che $[0, +\infty[$ è induttivo $\Rightarrow \mathbb{N} \subset [0, +\infty[$

- Se $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n_0 \neq 0 \Rightarrow n_0 - 1 \in \mathbb{N}$

DIM. Supponiamo per assurdo che ci sia un n_0 tale che $n_0 \neq 0$ e $n_0 - 1 \notin \mathbb{N}$. Allora se prendo

$A = \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ vediamo che

- $0 \in A$ (perché $n_0 \neq 0$)
- se $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$, infatti $n+1 \in \mathbb{N}$ ma $n+1 \neq n_0$ ($n_0 - 1 \notin \mathbb{N}$)

$\Rightarrow A$ è induttivo ma A è più piccolo di $\mathbb{N}$

ASSURDO

• Se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ esiste $\min A$

INFATTI dato che $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow \mu = \inf A \geq 0$

Se A non avesse minimo $\mu = \inf A \notin A$

Però io so che esiste un elemento n di A

con $\mu < n < \underbrace{\mu + 1/2}$ (metto $\varepsilon = 1/2$ nella prop. dell'estremo inferiore)

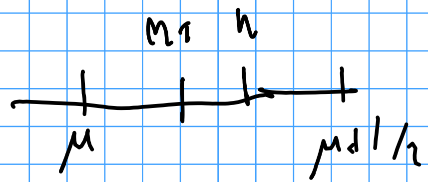
Riapplicando lo stesso discorso trovo n_1 in A

con $\mu < n_1 < n$ ($\varepsilon = n - \mu$ nella prop dell'inf.)

$(\mu < n_1 < n < \mu + 1/2)$

MA ALLORA $n_1 < n$ sono interi e

$0 < n - n_1 < \frac{1}{2}$ ASSURDO



$n - n_1 < \mu + \frac{1}{2} - \mu = \frac{1}{2}$

(si può ricavare dalle prop di $\mathbb{N}$ che non ci sono interi in $]n, n+1[$

• ANALOGAMENTE (NO DIM.): Se $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$

e $\sup A < +\infty \Rightarrow$ esiste $\max A$

Per esempio   Dato $x \in \mathbb{R}$ DEFINISCO

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

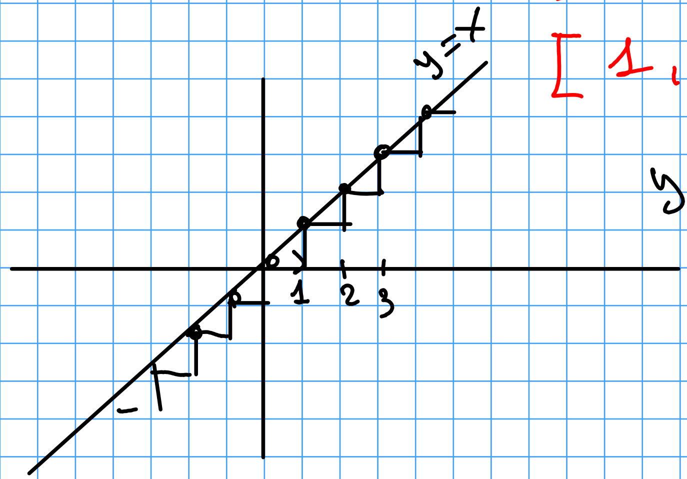
(parte intera di x)

(è facile vedere che anche se $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$

A limitato sup $\Rightarrow \exists \max A$)

ATTENZIONE $[-1,5] = -2$

$[1,5] = 1$



$y = [x]$

OSS. IL FATTO CHE $\mathbb{N}$ è il minimo insieme induttivo si può esprimere:

PRINCIPIO DI INDUZIONE

se $p(n)$ è una proprietà che si applica agli interi

se

- $p(0)$ è vero
- da $p(n)$ segue $p(n+1)$

ALLORA $p(n)$ È VERA $\forall n$

ESEMPI DI UTILIZZO DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE

- Varie proprietà già viste (a rigore serve il principio di induzione per DEFINIRE le sommatorie e fare i calcoli che abbiamo visto)

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} A^i = \frac{1-A^{n+1}}{1-A}$$ (DA RICODORDARE!)

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON:

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k} \leftarrow P(n)$$

$$\left(\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n \right)$$

<u>DIM.</u> a, b li fisso. Dimostro la formula per induzione su n. Devo dimostrare <u>DUE COSE</u>

<u>PASSO ZERO</u> : vale $P(0)$ cioè

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k .$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

1 nella sommatoria c'è un solo addendo $k=0$, che dà $\binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1$

$1 = 1$ VERA

<u>PASSO INDUTTIVO</u> "$P(n) \Rightarrow P(n+1)$" È VERA ?!

(non devo dimostrare né $P(n)$ né $P(n+1)$, ma

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$: per esempio 3 PARI $\Rightarrow$ 5 PARI
È VERA)

AMMETTIAMO DUNQUE CHE VALGA A $p(n)$, CIOÈ CHE

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

MOLTIPLICO PER $(a+b)$

$$\underline{(a+b)^{n+1}} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$(h = k+1 \leftrightarrow k = h-1)$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h =$$

posso cambiare il nome ad h e chiamarlo di nuovo k

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k =$$

$$\underset{(k=0)}{\binom{n}{0} a^{n+1} b^0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \underset{(k=n+1)}{\binom{n}{n} a^0 b^{n+1}}$$

LI METTO INSIEME

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^{k} + b^{n+1} =$$

$$\binom{n+1}{k} \quad !!$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} + b^{n+1} =$$

si interpreta come $\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k}$ mettendo $k=0$ ... mettendo $k=n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k}$$

ABBIAMO DIMOSTRATO (partendo da $p(n)$)

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} \quad (\text{cioè } p(n+1))$$

cioè $\quad p(n) \Rightarrow p(n+1)$

FINE

ALTRA PROPRIETÀ (che ci servirà spesso)

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

Se $a > -1$ (in $\mathbb{R}$) e $n \geq 0$ (in $\mathbb{N}$) si ha

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

(se $a > 0$ allora la deduco da Newton

$$(1+a)^n = 1 + na + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} a^2 + \dots + a^n}_{\geq 0}\;)$$

LO DIMOSTRO (con $a > -1$) PER INDUZIONE SU n,

chiamando $p(n) =$ " $(1+a)^n \geq 1 + na$ "

PASSO ZERO $\quad p(0)$ $\quad \underset{1}{\underbrace{(1+a)^0}} \geq \underset{1}{\underbrace{1 + 0 \cdot a}}$ $\quad$ **VERA**

PASSO INDUTTIVO Do per buono che:

$(p(n))$ $\quad (1+a)^n \geq 1 + na$ $\quad$ MOLTIPLICO PER $(1+a) > 0$

$$\Rightarrow \quad (1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1+a+na+na^2$$
$$\geq 1+a+na \qquad (\text{perché } na^2 \geq 0)$$
$$= 1+(n+1)a$$

$\Rightarrow$ vale $p(n+1)$

PRINCIPIO DI IND $\Rightarrow$ $p(n)$ VALE $\forall n$.

IDEA : LO SO PER $n=1$

$(1+a)^1 \geq 1+a$ MOLTIPLICO PER $1+a$

$(1+a)^2 \geq 1+a+a+a^2 = 1+2a+a^2 \geq 1+2a$

VALE PER $n=2$

$(1+a)^2 \geq 1+2a$ MOLTIPLICO PER $1+a$:

$(1+a)^3 \geq (1+2a)(1+a) = 1+3a+2a^2 \geq 1+3a$

⋮

$\leftarrow$ QUESTO È IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

⋮