Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Quarta lezione, 8 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

$A \subset \mathbb{R}$ $\quad A \neq \emptyset$

$\underline{\max A = \bar{a}}$ se $\bar{a} \in A$ e $\bar{a} \geq a \quad \forall a \in A$

$\underline{\min A = \underline{a}}$ se $\underline{a} \in A$ e $\underline{a} \leq a \quad \forall a \in A$

IN GENERALE NON È DETTO CHE $\max A$ / $\min A$

Dico che A è limitato superiormente se esiste un maggiorante per A, cioè se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \geq a \quad \forall a \in A$

Dico che A è limitato inferiormente se esiste un minorante per A, cioè se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a \quad \forall a \in A$

A limitato $\Leftrightarrow$ A è limitato sup. e inf.

<u>DEF</u> • Se A è limitato superiormente si pone

$$\sup A = \min \{\text{maggioranti di } A\}$$

• Se A è limitato inferiormente si pone

$$\inf A = \max \{\text{minoranti di } A\}$$

ESISTONO A CAUSA DI DEDEKIND

OSS. Esiste max A se e solo se $\boxed{A \text{ è limitato superiormente e } \sup A \in A}$

in questo caso $\max A = \sup A$

(ANALOGA PROP. per l'inf. $\to$ min)

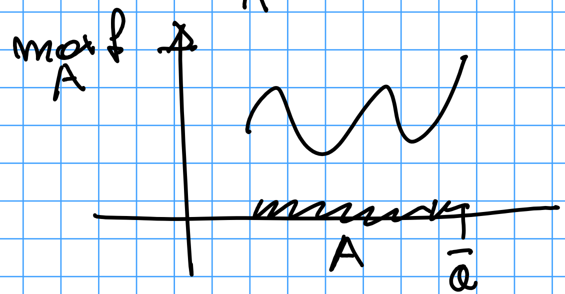
ANALOGHE DEFINIZIONI PER LE FUNZIONI A VALORI REALI

SIA A un insieme (non necessariamente in $\mathbb{R}$) e una funzione $f : A \to \mathbb{R}$

DEF. $\max\limits_{A} f = \max\limits_{x \in A} f(A)$ è per definizione

$\max f(A)$ CIOÈ

$\max\limits_{A} f$ è quel $f(\bar{a})$ tale che $\bar{a} \in A$, $f(a) \leq f(\bar{a})$ $\forall a \in A$



($\bar{a}$ si dice punto di max per f su A)

ci sono DUE COSE

$\max_A f$ ← VALORE MAX (∈ IMMAGINE ∈ $\mathbb{R}$)

pto di max (∈ DOMINIO DI f)

MAX È UNICO – pto di max non è necessariamente unico

• $\min_A f = \min_{x\in A} f(x) = \min f(A)$

(quel valore $f(\underline{a})$ tale che $\underline{a} \in A$ e $f(\underline{a}) \leq f(a)$ $\forall a \in A$)

• f si dice limitato superiormente (inferiormente) su A

se $f(A)$ è limitato superiormente (inferiormente)

cioè se esiste un maggiorante (minorante) per $f(A)$ $\iff$

$\exists$ M (m) con $M \geq f(a)$ $\forall a \in A$ ($m \leq f(a)$ $\forall a \in A$)

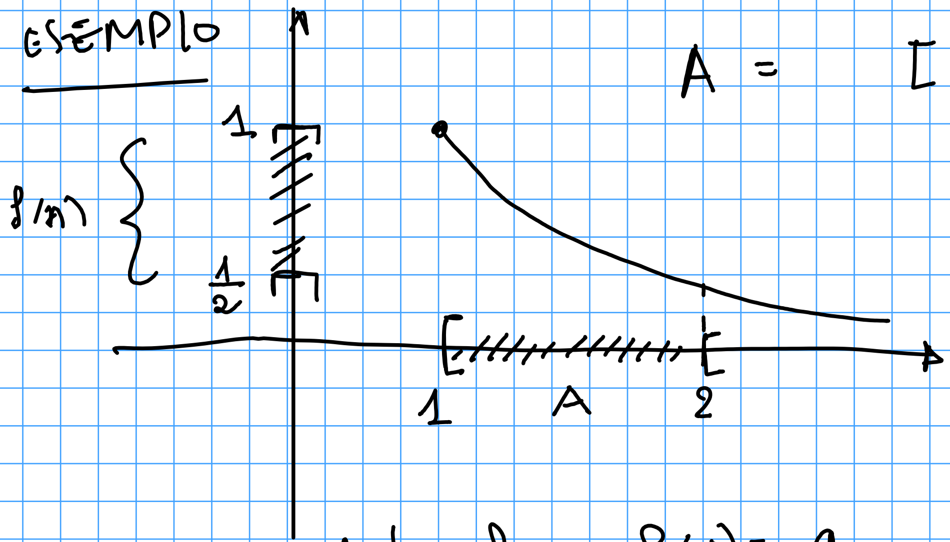
– f si dice limitata su A se limitata sia sup che inf. su A

Se f è limitata sup. (inf.) su A definisco

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) \quad \text{come} \quad \sup f(A)$$

$$\left(\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{come} \quad \inf f(A) \right)$$

ESEMPIO



$A = [1, 2[\qquad f(x) = \frac{1}{x}$

- $\sup A = 2$ (NON È MAX)
- $\inf A = 1 = \min A$
- $\sup_A f = 1 = \max_A f A$

dato che $f(1) = 1$ e $\forall x \in [1, 2[\quad f(x) \leq 1$

- $\inf_A f = \frac{1}{2}$ NON È DI MIN PER f su A

IN EFFETTI $f([1, 2[) =]\frac{1}{2}, 1]$

CONVENZIONI · Se A non è limitato superiormente (ma $A \neq \emptyset$)

si scrive $\sup A = +\infty$ $(A \subset \mathbb{R})$

· Se A non è limitato inferiormente (ma $A \neq \emptyset$) si scrive

$\inf A = -\infty$

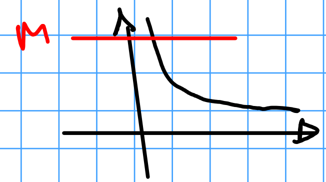
STESSO DISCORSO PER le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$

$\sup\limits_{A} f = +\infty$ vuol dire $\sup f(A) = +\infty$, cioè f NON È LIM. SUP su A

$\inf\limits_{A} f = -\infty$ " " $\inf f(A) = -\infty$, cioè f NON È LIM. INF. su A

PER ESEMPIO se $A =]0, +\infty[$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\sup_{x \in A} f(x) \quad \left(\sup_{x>0} \frac{1}{x} \right) = +\infty}$$



perché non esiste nessun numero M tale che $\frac{1}{x} \leq M$ $\forall x > 0$

infatti dato M trovo x con $\frac{1}{x} > M$ $\left(x = \frac{1}{M+1} \right)$

Invece

$$\inf_{x>0} \frac{1}{x} = 0$$

infatti se $f(x) = \frac{1}{x}$ e $A =]0, +\infty[\Rightarrow f(A) =]0, +\infty[$

e $\inf]0, +\infty[= 0$.

CONVENZIONE ULTERIORE (non la useremo quasi mai)

$$\inf \emptyset = +\infty \qquad \sup \emptyset = -\infty$$

Con queste convenzioni possiamo scrivere sempre $\inf A / \sup A$ qualunque sia A contenuto in $\mathbb{R}$. Questi $\sup / \inf$ sono in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, che possiamo indicare con $\overline{\mathbb{R}}$ o $[-\infty, +\infty]$ ($\mathbb{R}$ esteso). Su $\overline{\mathbb{R}}$ possiamo convenire che

$$+\infty \geq x \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$-\infty \leq x \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$$

IN QUESTO MODO è sempre vero che $\boxed{\inf A \leq \sup A}$

TRANNE CHE NEL CASO $A = \emptyset$.

PROPRIETÀ DI sup/inf (le scrivo per il sup)

CARATTERIZZAZIONE: Se $A \subset \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ e limitato sup., allora

$\lambda = \sup A$ (lamda) **SE E SOLO SE**
$$\boxed{\begin{cases} (1) \quad \lambda \geq a \in A \\ (2) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ a' \in A : a' > \lambda - \varepsilon \end{cases}}$$

(2) per ogni ε positivo si trova un elemento a' di A con $a' > \lambda - \varepsilon$

DIM. (1) dice che λ è un maggiorante di A

(2) dice che se "rimpicciolisco" λ di un $\varepsilon > 0$ arbitrario, $\Rightarrow$

$\lambda - \varepsilon$ NON È MAGGIORANTE

DUNQUE (1) + (2) equivalgono a dire che λ è il minimo dei maggioranti

Per verificare che $\lambda = \sup A$ di solito si usano (1) + (2)

(vedere la dim. di ieri per mostrare che $\sup [0,1[= 1$)

SI PUO' ANCHE CONSIDERARE IL CASO $+\infty$:

$\left[\sup A = +\infty\right.$ SE E SOLO SE $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, a' \in A$ con $a' > M$

($\sim$ la ② del caso finito) $\left.\right]$

Nel caso delle funzioni ci sono proprietà analoghe

A insieme $\neq \emptyset$ $f: A \to \mathbb{R}$. Allora

$$\left[\lambda = \sup_A f \right. \quad \text{SE E SOLO SE} \quad \begin{cases} ① & \lambda \geq f(a) \quad \forall a \in A \\ ② & \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a' \in A : f(a') > \lambda - \varepsilon \end{cases}$$

$(\lambda \in \mathbb{R})$

INVECE (caso infinito)

$$\left[+\infty = \sup_A f \right. \quad \text{SE E SOLO SE} \quad \forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, a' \in A : f(a') > M$$

ESEMPIO $A = \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Chi sono $\inf_A f$ / $\sup_A f$ / sono o no min/max ?!

NOTO SUBITO CHE $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\inf_A f = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \geq 0$$

NOTO ANCHE che $1+x^2 \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq 1$$

DATO CHE $f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$ DEDUCO CHE

$$\exists \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \left(= \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \right) = 1 \quad \left(\underline{0 \text{ è punto di max}} \right)$$

IDEA: se x DIVENTA GRANDE $\Rightarrow x^2+1$ DIVENTA GRANDE

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ DIVENTA PICCOLO.

CERCHIAMO ALLORA DI DIM. CHE $\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = 0$

Avendo già visto che $f(x) \geq 0 \quad \forall x$, mi manca:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) < \varepsilon \quad (0+\varepsilon)$$

CONCRETAMENTE: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x : \frac{1}{1+x^2} < \varepsilon$

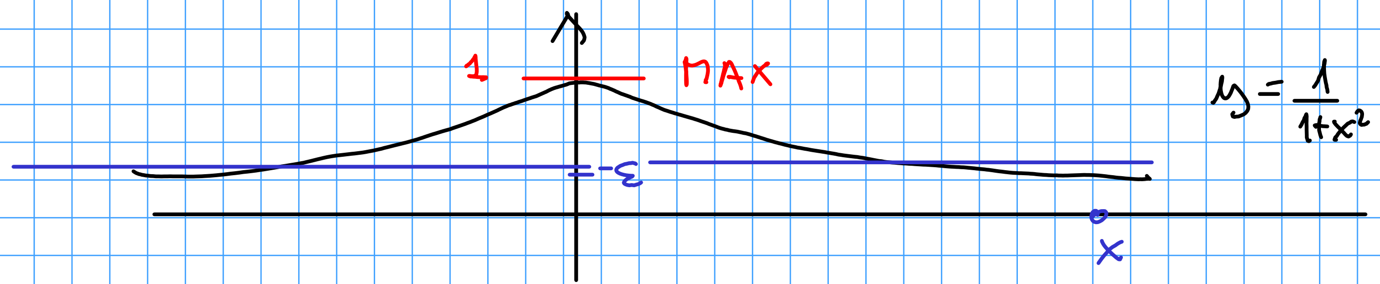
$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x : \quad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

È CHIARO CHE TALE x esiste $\left(x = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$

DUNQUE $\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = 0$ NON ESISTE $\min_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}$

dato che non esiste nessuna $x \in \mathbb{R}$ per cui $\frac{1}{1+x^2} = 0$

SI POTREBBE VEDERE IL GRAFICO DI f



VARIE PROPRIETÀ (vedi Tabella)

ESEMPI E CONTROESEMPI (nel caso delle funzioni)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A limitato superiormente. Allora $\boxed{\lambda = \sup A}$ se solo se

- $\lambda \geq a$ per ogni a in A;
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste a' in A con $a' > \lambda - \varepsilon$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e A limitato inferiormente. Allora $\boxed{\mu = \inf A}$ se solo se

- $\mu \leq a$ per ogni a in A;
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste a' in A con $a' < \mu + \varepsilon$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Allora $\boxed{\inf A = +\infty}$ se solo se

- per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste a' in A con $a' > M$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Allora $\boxed{\inf A = -\infty}$ se solo se

- per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste a' in A con $a' < M$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$ limitata superiormente. Allora $\boxed{\lambda = \sup_A f}$ sse

- $\lambda \geq f(a)$ per ogni a in A;
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste a' in A con $f(a') > \lambda - \varepsilon$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$ limitata inferiormente. Allora $\boxed{\mu = \inf_A f}$ sse

- $\mu \leq f(a)$ per ogni a in A;
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste a' in A con $f(a') < \mu + \varepsilon$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\inf_A f = +\infty}$ sse

- per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste a' in A con $f(a') > M$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\inf_A f = -\infty}$ sse

- per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste a' in A con $f(a') < M$

Varie proprietà di inf e sup di insiemi

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$

- Si ha $\boxed{\inf A \leq \sup A}$ (però $\inf \emptyset = +\infty > -\infty = \sup \emptyset$);
- Se K è un numero tale che $\boxed{a \leq K \quad \forall a \in A, \quad \text{allora } \sup A \leq K}$;
- Se K è un numero tale che $\boxed{a \geq K \quad \forall a \in A, \quad \text{allora } \inf A \geq K}$;
- se $\boxed{c \geq 0}$ e se $c \cdot A := \{c \cdot a : a \in A\}$, allora

$$\boxed{\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A} \qquad \boxed{\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A};$$

- se $\boxed{c \leq 0}$, allora

$$\boxed{\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A} \qquad \boxed{\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A};$$

- se $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, allora

$$\boxed{\sup(A+B) = \sup A + \sup B} \qquad \boxed{\inf(A+B) = \inf A + \inf B}.$$

Varie proprietà di inf e sup di funzioni

Siano $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$

- Si ha $\boxed{\inf_A f \leq \sup_A f}$;
- Se K è un numero tale che $\boxed{f(a) \leq K \quad \forall a \in A, \quad \text{allora } \sup_A f \leq K}$;
- Se K è un numero tale che $\boxed{f(a) \geq K \quad \forall a \in A, \quad \text{allora } \inf_A f \geq K}$;
- se $\boxed{c \geq 0}$, allora $\boxed{\sup_A (c \cdot f) = c \cdot \sup_A f}$ $\boxed{\inf_A (c \cdot f) = c \cdot \inf_A f}$;
- se $\boxed{c \leq 0}$, allora $\boxed{\sup_A (c \cdot f) = c \cdot \inf_A f}$ $\boxed{\inf_A (c \cdot f) = c \cdot \sup_A f}$;
- si ha (ATTENZIONE non è detto che valga "=")

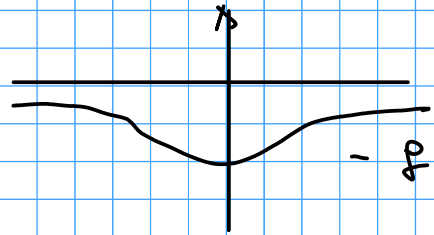
$$\boxed{\inf_A f + \inf_A g \leq \inf_A (f+g) \leq \sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g}.$$

se $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\left(\sup_{\mathbb{R}} f = 1 \ , \ \inf_{\mathbb{R}} f = 0 \right)$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} 2f = \sup \frac{2}{1+x^2} = 2$ / $\inf_{\mathbb{R}} 2f = 0$

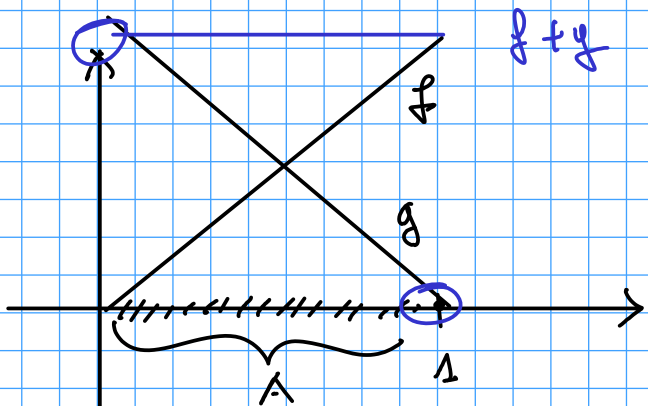
MA $\sup_{\mathbb{R}} (-f) = 0$ $\left(= -\inf_{\mathbb{R}} f \right)$

$\inf_{\mathbb{R}} (-f) = -1$ $\left(= -\sup_{\mathbb{R}} f \right)$



Riguardo alla somma:

$A = [0,1]$ $\qquad f(x) = x \qquad g(x) = 1 - x$



$\sup_A f = 1 \qquad \inf_A f = 0$ (sono max/min)

$\sup_A g = 1 \qquad \inf_A g = 0$

(ma 1 è pto di min per g / 0 pto di max per g)

f assume max nel pto 0 / assume min nel pto 1

$f(0) = 0 \le f(x) \le 1 = f(1) \quad \forall x \in [0,1]$

g " " nel pto 1 / assume min nel pto 0

$f(x) + g(x) = x + 1 - x = 1$ DUNQUE

$$\inf_A (f+g) = \sup_A (f+g) = 1$$

mentre $\sup_A f + \sup_A g = 2$ $\inf_A f + \inf_A g = 0$

(FORMALMENTE $f(A) + g(A) \neq (f+g)(A)$)

ESEMPIO

considero la funzione $\boxed{f(x) = \frac{x}{1+x^2}}$ (*)

Confrontiamo le varie definizioni viste fino ad ora con questa f.

IN REALTÀ DOVREI DIRE $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ definita da (*)

SPESSO PERÒ SI DÀ SOLO $f(x) = \dots$, e si sottointende che il CODOMINIO $= \mathbb{R}$ e il DOMINIO È "il più grosso" $A \subset \mathbb{R}$ in cui ha senso calcolare $f(x)$. Dato che $\frac{x}{1+x^2}$ ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$ dico che $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

CHI È L'IMMAGINE DI f, cioè

$$f(\mathbb{R}) = \left\{ y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \text{ per cui } \frac{x}{1+x^2} = y \right\}$$

In altri termini $f(\mathbb{R}) = \left\{ y : \text{si risolve l'equazione } \frac{x}{1+x^2} = y \right\}$

VEDIAMO CHI È $f(\mathbb{R})$. Fisso y e cerco di risolvere

$$\frac{x}{1+x^2} = y \quad \Longleftrightarrow$$

(NOTA L'eguale "=" è usato in modo diverso da $3^2 = 9 = 9^1$; e questo è a sua volta diverso da una DEFINIZIONE tipo

$$\sqrt{x} \ \overset{=}{\text{DEF}} \ \text{quel numero } t \geq 0 \text{ tale che } t^2 = x$$

$$:=$$
)

$$x = (1+x^2)\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + x^2 y$$

$y x^2 - x + y = 0$ $\boxed{\text{se } y \neq 0}$ eq. di II° grado in x ; risolubile se

$1 - 4y^2 \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$

se $y \neq \pm\frac{1}{2} \Rightarrow 2$ sol $x = \boxed{\frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}}$

$\boxed{\text{se } y = 0}$ eq. di I° grado che ha 1 solo sol. $x = 0$

RIASSUMENDO l'eq. $f(x) = y$

- NON HA SOL. se $y > 1/2$ oppure $y < -1/2$
- HA 1 SOL. se $y = 0$, $y = 1/2$, $y = -1/2$
- HA 2 SOL. se $-\frac{1}{2} < y < 0$ oppure $0 < y < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; in particolare $\max_{\mathbb{R}} f = \frac{1}{2}$, $\min_{\mathbb{R}} f = -\frac{1}{2}$

(dalle formule sopra si ricava che

1 = pto di max $f(1) = 1/2$

-1 = pto di min $f(-1) = -1/2$

INOLTRE f NON È INIETTIVA: se $0 < y < 1/2$ ci

ci sono DUE x DISTINTE PER CUI $f(x) = y$

COSÌ COM'È f NON È NÉ INIETTIVA NÉ SURGETTIVA

VEDIAMO SE CI SONO DEI SOTTOINSIEMI $A \subset \mathbb{R}$ per cui la "restrizione" di f su A è INIETTIVA

Abbiamo visto che se $0 < y < 1/2$ le x per cui $f(x) = y$ sono

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \implies 0 < x_1 \underset{?}{\uparrow}{<} 1 \underset{?}{\uparrow}{<} x_2$$

??

$$\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} < 1 \iff 1 - \sqrt{1-4y^2} < 2y$$

$$1 - 2y < \sqrt{1-4y^2} \qquad (\forall y \text{ tra } 0 \text{ e } 1/2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-2y)^2 < 1 - 4y^2 \qquad \forall y \text{ tra } 0 \text{ e } 1/2$$

$1 - 4y + 4y^2 < 1 - 4y^2$

$8y^2 - 4y < 0$

$4y(2y-1) < 0$ VERA SE $0 < y < 1/2$

DUNQUE $x_1 < 1$ (Analogamente vedo che $x_2 > 1$

NE SEGUE CHE LA RESTRIZIONE A $[0,1]$ è INIETTIVA : $\forall$ $x' \neq x''$ $\in [0,1]$ $f(x') \neq f(x'')$

CON CALCOLI ANALOGHI SI VEDE CHE RISULTANO INIETT.

- LA RESTRIZIONE A $[1, +\infty[$
- LA RESTRIZIONE A $[-1, 0]$
- LA RESTRIZIONE A $]-\infty, -1]$

corrispondono alle $y<0$ in cui le radici sono $x_1 < -1 < x_2 < 0$

DUNQUE CI SONO "VARIE INVERSE"

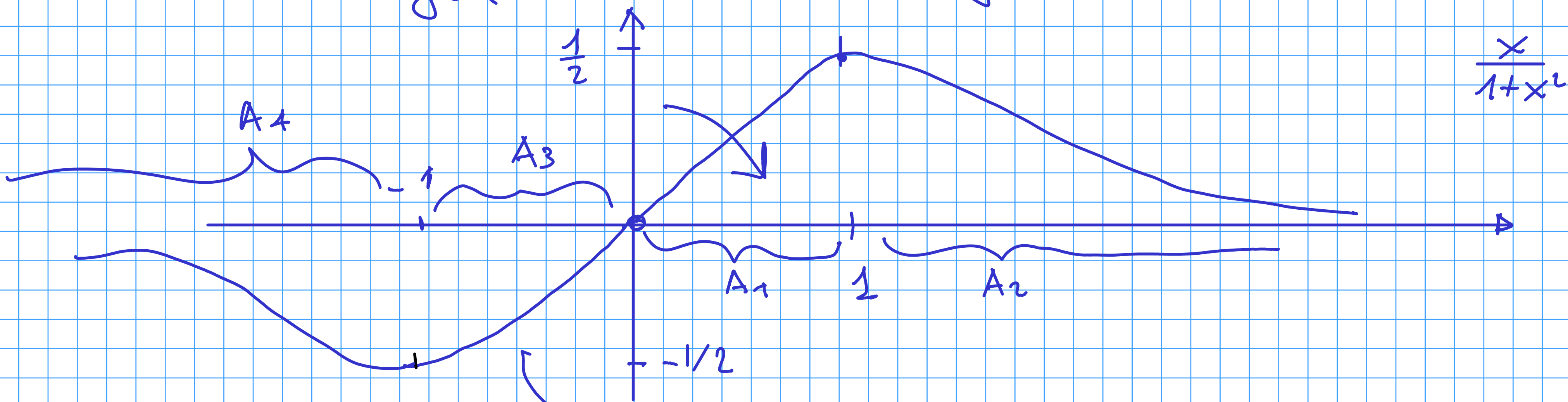
$$\left(f|_{[0,1]}\right)^{-1} : [0, 1/2] \to [0,1]$$

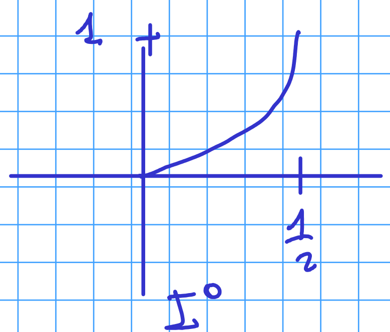
$$\left(f|_{[1,+\infty[}\right)^{-1} : \left]0, 1/2\right] \to [1,+\infty[\quad \leftarrow$$

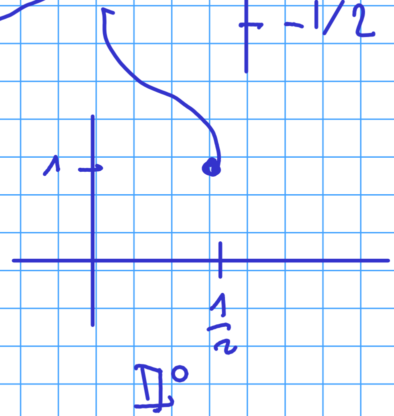
$$\left(f|_{[-1,0]}\right)^{-1} : [-1/2, 0] \to [-1, 0]$$

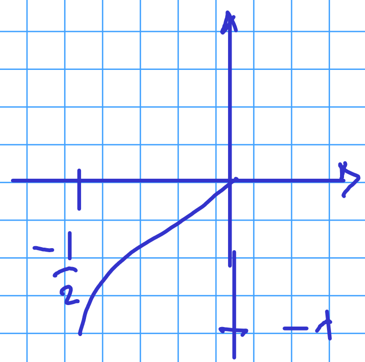
$$\left(f|_{]-\infty,-1]}\right)^{-1} : [-1/2, 0[\to [-\infty, 1[$$

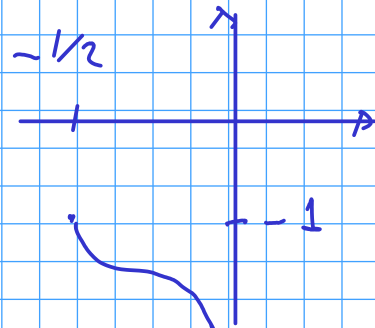
Se si dovesse fare lo studio di funzione si vedrebbe











ESEMPI (IMPORTANTI): LE FUNZIONI POTENZA $f(x)=x^n$

Dato n intero considero $f: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ def. da

$$f(x)=x^n$$

FATTI: • $n=0$ $f(x)=1$ Prendo $n \geq 1$

• $f(x) > f(y)$ se $x > y$ (f strettamente crescente)

Lo ricavo dalla formula

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y)\underbrace{(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots)}_{\geq 0}$$

dunque il segno di $x^n - y^n$ è lo stesso di $(x-y)$

• f sono tutte surgettive: dato $y \geq 0$ $\exists\, x \geq 0$ per cui $x^n = y$ conseguenza dell'assioma di Dedekind: si può prendere $x = \sup\{x' \geq 0 \text{ tali che } (x')^n < y\}$

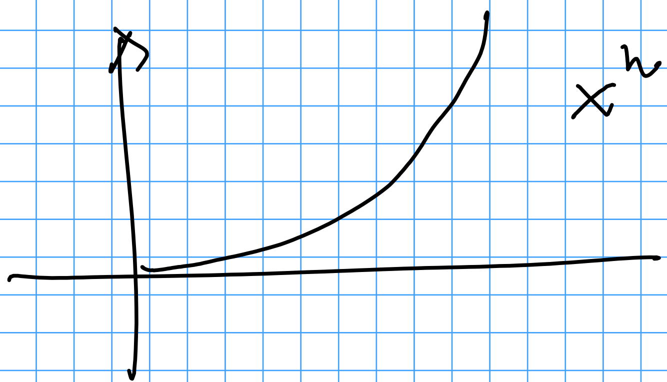
(SI PUÒ DIMOSTRARE CHE TALE x verifica $x^n = y$)

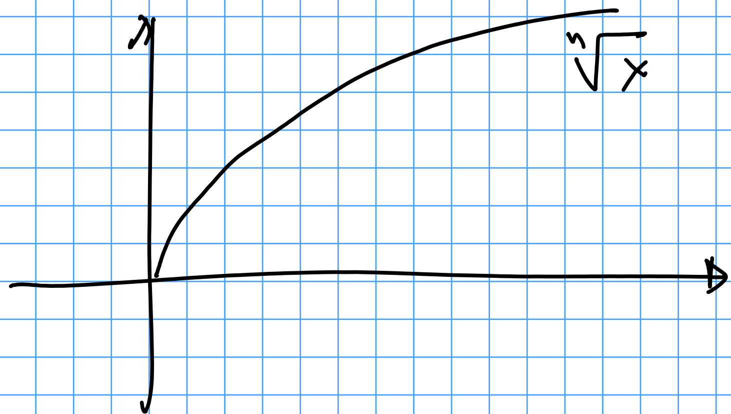
$\Longrightarrow$ $\forall n \geq 1$ esiste l'inverso $f^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$

detta "radice n-esima" $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

se $x \geq 0$ $\quad \sqrt[n]{x} =$ l'unico $z \geq 0$ tale che $z^n = x$

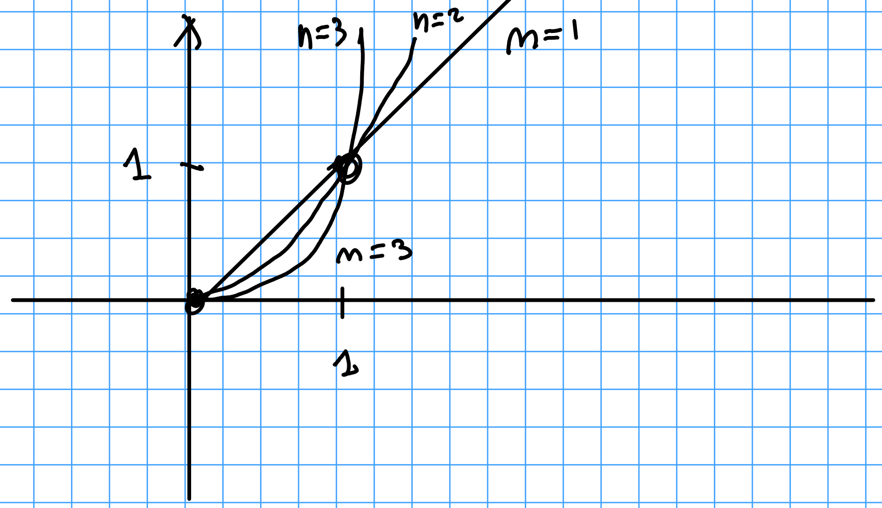
ANCHE f^{-1} È CRESCENTE





FATTO se FISSO x e se $n \geq m \geq 1$ $\Longrightarrow$

$x^n \geq x^m$ per $x \geq 1$ / $x^n \leq x^m$ per $x \leq 1$



$x > x^2 > x^3$ se $0<x<1$

$x^3 > x^2 > x$ se $x>1$

$$x^n - x^m = x^m\left(x^{n-m} - 1\right) \begin{cases} >0 & \text{se } x>1 \\ <0 & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

<u>Def</u> Si definisce la potenza di esponente $q \in \mathbb{Q}$ dicendo

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \left(q = \frac{n}{m}\right)$$

Per farlo si deve verificare che

se $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} \Longrightarrow \sqrt[m_1]{x^{n_1}} = \sqrt[m_2]{x^{n_2}}$ (lo diamo per buono)

$$= \left(\sqrt[m_1]{x}\right)^{n_1}$$

quindi posso fare x^q se $q \in \mathbb{Q}$ $q \geq 0$

Se poi $q < 0$ definisco $x^q := \dfrac{1}{x^{-q}}$

PROPRIETÀ

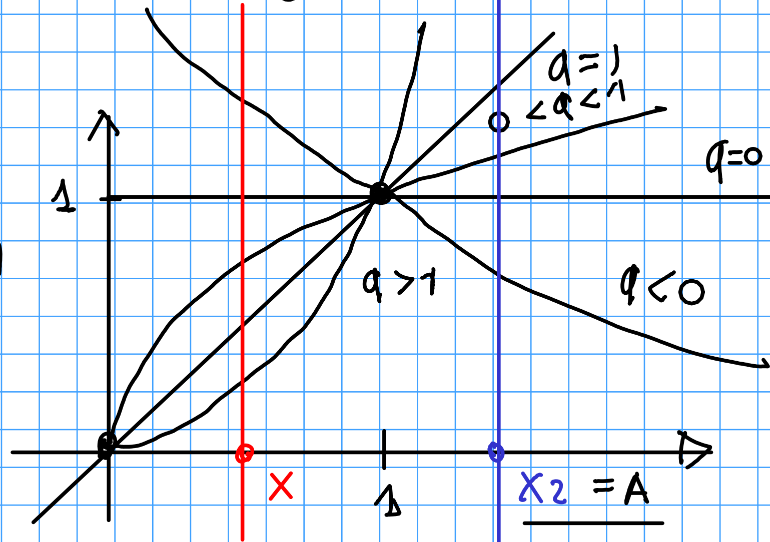
$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$ (si vede ...)

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Rimane vero che se $q_1 > q_2$ in $\mathbb{Q}$

$x^{q_1} > x^{q_2}$ quando $x > 1$

$x^{q_1} < x^{q_2}$ quando $0 < x < 1$



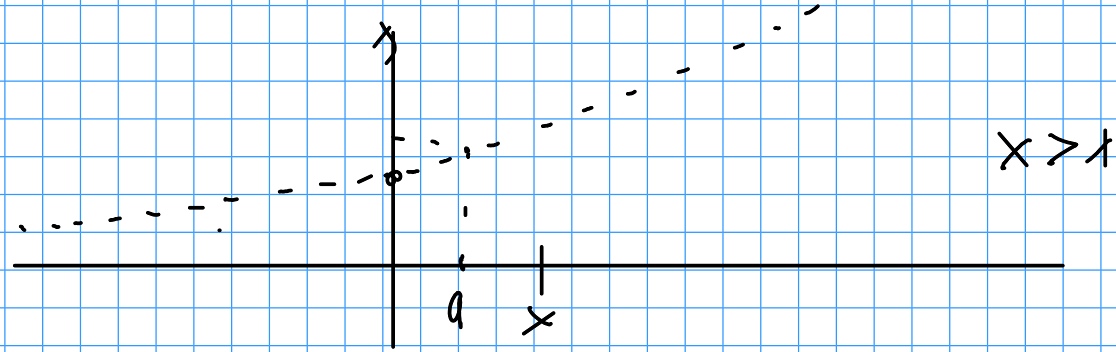
se $x = x_2$ la potenza cresce al crescere dell'esponente

se $x = x_1$ la potenza decresce al crescere dell'esponente

SE ORA FISSO $x > 0$ e considero la funzione $q \longmapsto x^q$

ottengo una funzione $e : \mathbb{Q} \to]0, +\infty[$ che ha

il "seguente aspetto"



(il tratteggio vuol dire che la considero solo su $\mathbb{Q}$).

POSSO ESTENDERE $e(q)$ a tutto $\mathbb{R}$ ponendo

$$e(x) := \sup \{ e(q) : q \in \mathbb{Q} , q < x \}$$

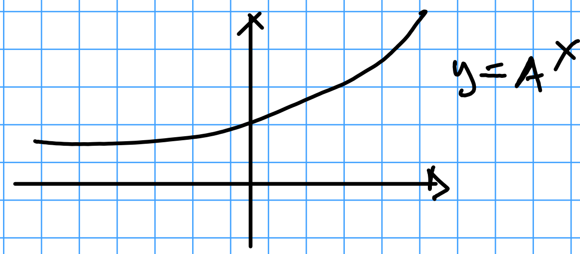
Si vede che ci può fare e che sarebbe lo stesso definire

$$e(x) := \inf \{ e(q) : q \in \mathbb{Q} \ q > x \}$$

DUNQUE HO DEFINITO LA "funzione esponenziale"

$$e(x) = A^x \qquad (A \text{ è la base } A > 1)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$



CRESCENTE

con le proprietà ("ereditate" dagli esponenti razionali)

$$A^{x+y} = A^x \cdot A^y$$

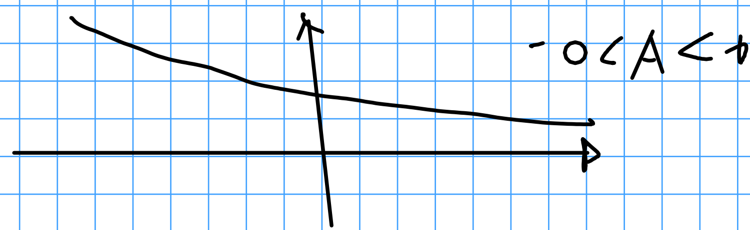
$$(A^x)^y = A^{x \cdot y}$$

$$A^0 = 1$$

$$A^1 = A$$

$$A^{-x} = \frac{1}{A^x}$$

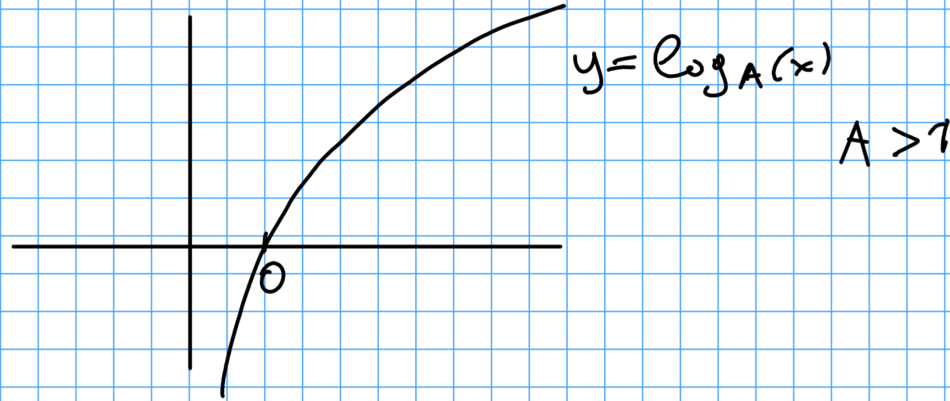
Se poi parto da $0 < A < 1$ ottengo risultato analogo - solo che A^x è decrescente



SI VEDE CHE $x \to A^x$ $(A>1)$ è surgettivo (se la penso a valori in $]0,+\infty[$) $\Rightarrow$ esiste l'inversa che va da $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e si chiama logaritmo in base A

x deve essere >0

$$\log_A(x)$$



$$\log_A(1)=0$$

$$\log_A(xy) = \log_A(x) + \log_A(y) \quad \text{se } x,y>0$$

$$\log_A(x^y) = y\log_A(x) \quad \text{se } x>0$$