Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Terza lezione, 7 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

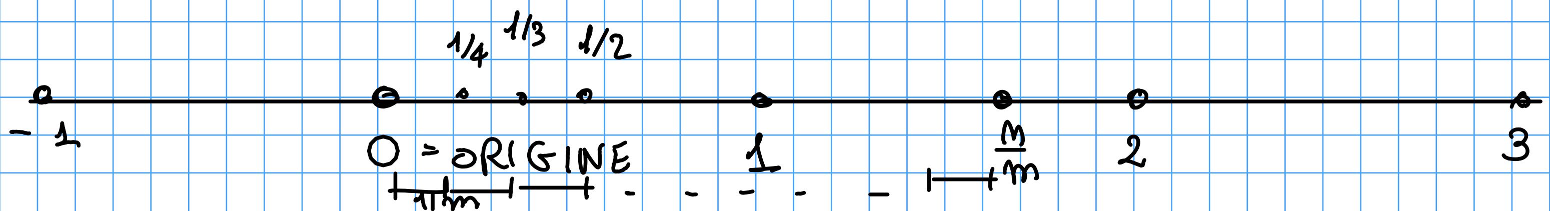
NUMERI REALI

Procedimento "costruttivo": si incontrano

- NUMERI INTERI $1, 2, 3, \dots$ $(\mathbb{N})$
  (servono per "contare")
- NUMERI INTERI RELATIVI (possiamo sempre fare la differenza tra interi relativi) $(\mathbb{Z})$
- NUMERI RAZIONALI (FRAZIONI): posso sempre dividere due razionali $(\mathbb{Q})$
  (servono per "misurare")

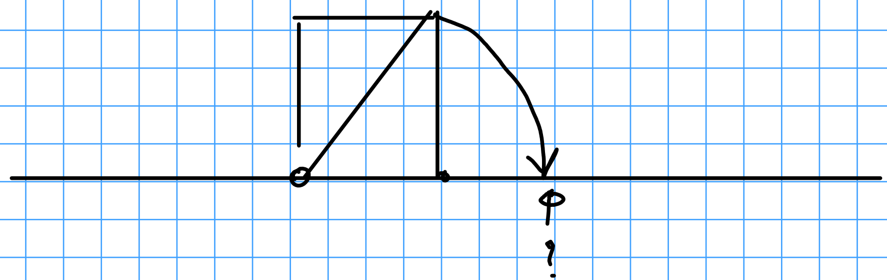
PURTROPPO I NUMERI RAZIONALI "hanno dei buchi"

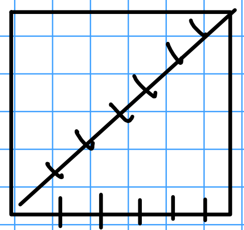
[Se costruisco una corrispondenza tra i numeri razionali e la retta si vede che ci sono punti della retta non descritti da razionali.]



IL PUNTO DI COORDINATA $\frac{n}{m}$ è individuato prendendo $\frac{1}{m}$ dell' unità di misura e "replicandolo" n volte

FATTO NON C'È NESSUN NUMERO RAZIONALE CHE INDIVIDUI LA DIAGONALE DEL QUADRATO DI LATO 1





NON È POSSIBILE DIVIDERE IL LATO DI UN QUADRATO IN m PARTI TALI CHE LA DIAGONALE NE CONTENGA n

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Non c'è nessun numero razionale } q = \frac{n}{m} \text{ tale che } q^2 = 2}$

Dim. Supponiamo che un tale q esista. Allora $q = \frac{n}{m}$ $(n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0)$. Possiamo supporre n ed m primi tra loro (se semplifichiamo tutti i fattori comuni). Se $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \boxed{n^2 = 2m^2}$$

IN PARTICOLARE n^2 È PARI

$\Rightarrow$ n È PARI (se non fosse pari n sarebbe dispari (perché?) cioè $n = 2k+1$. Ma allora

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

da cui n^2 è dispari ASSURDO)

SE n è pari $n = 2k$ per k intero $\Rightarrow$ $n^2 = 4k^2$ e quindi $4k^2 = 2m^2$ $\Rightarrow$ $2k^2 = m^2$ $\Rightarrow$ m^2 PARI $\Rightarrow$ m PARI

NON È POSSIBILE (avevamo detto che n ed m erano primi tra loro!)

NON ESISTE $\sqrt{2}$ NEI RAZIONALI

Bisogna "completare" $\mathbb{Q}$ per poter descrivere la retta. NON LO FACCIAMO: facciamo finta di sapere cosa sono i reali, ma METTIAMO IN EVIDENZA LE LORO PROPRIETÀ

(Approccio "assiomatico": non dico chi è $\mathbb{R}$, ma "come funzionano" i numeri reali.)

> $\mathbb{R}$ un insieme su cui sono definite
> - due operazioni
> - una relazione d'ordine
>
> e inoltre $\mathbb{R}$ "è completo"

VEDI TABELLA ALLEGATA

I numeri reali

I numeri reali sono un insieme, che indicheremo con $\mathbb{R}$, in cui sono definite:

- due **operazioni**, dette somma e prodotto. Formalmente:

$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  (s è la somma e p il prodotto) che indichiamo nel modo più standard:

$$x + y \text{ in luogo di } s(x,y) \qquad x \cdot y \text{ (o } xy \text{) in luogo di } p(x,y)$$

  che hanno le proprietà elencate nel seguito;
- una **relazione d'ordine**, formalmente:

$$O : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{\text{VERO}, \text{FALSO}\},$$

  per cui usiamo la notazione

$$x \geq y \text{ per indicare che } O(x,y) = \text{VERO}$$

  (*è vero che x è maggiore o eguale a y*) con le proprietà elencate dopo.

Inoltre $\mathbb{R}$ ha una proprietà di **completezza** (a differenza di $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ *non ha buchi*).

Assiomi dei numeri reali: operazioni

Proprietà della **somma** "+"

- $x+y=y+x$ (prop. commutativa)
- $(x+y)+z=x+(y+z)$ (prop. associativa)
- esiste 0 tale che $0+x=x$ (esistenza elemento neutro)
- esiste $-x$ tale che $-x+x=0$ (esistenza inverso: *l'opposto*)

Proprietà del **prodotto** "·"

- $x\cdot y=y\cdot x$ (prop. commutativa)
- $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (prop. associativa)
- esiste 1 tale che $1\neq 0$ e $1\cdot x=x$ (esistenza elemento neutro)
- se $x\neq 0$ esiste $1/x$ tale che $1/x\cdot x=1$ (esistenza inverso: *il reciproco*)

Legame tra somma e prodotto

- $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (prop. distributiva)

Assiomi dei numeri reali: relazione d'ordine

Proprietà dell'**ordine** "$\geq$"

- se $x, y \in \mathbb{R}$ una tra $x \geq y$ e $y \geq x$ è vera (ℝ totalmente ordinato)
- $x \geq x$ (prop. riflessiva)
- se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (prop. antisimmetrica)
- se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (prop. transitiva)

Legami tra ordine e operazioni

- se $x \geq y$, allora $x + z \geq y + z$
- se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \geq y \cdot z$

ASSIOMA DI DEDEKIND (completezza)
Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B \qquad a \leq b$$

allora esiste c (**elemento separatore**) tale che

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B \qquad a \leq c \leq b$$

Se ci fosse $0'$ tale che $0' + x = 0' \quad \forall x$

potrei prendere $x = 0 \Rightarrow \quad 0' + 0 = 0'$

M. analogamente $\quad 0 + 0' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0'$

(stesso discorso: 1 è unico)

(b) Dato $x \in \mathbb{R}$ c'è un solo $-x$.

Supponiamo che ci sia un y tale che

$$y + x = 0$$

Sommiamo $-x$ a entrambi i lati:

$$y + \underbrace{x + (-x)}_{0} = -x$$

$$\underbrace{y + 0}_{y} = -x$$

$$y = -x$$

$\left(\text{stesso discorso: } \dfrac{1}{x} \text{ è unico} \right)$

(c) $\quad 0 \cdot x = 0 \quad \forall x$

$0 = 0 + 0 \quad$ (0 è neutro)

$\Rightarrow \quad 0 \cdot x = (0+0)x \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \quad$ (distributiva)

SOMMO $-0 \cdot x$ e entrambi i lati:

$$\underbrace{0 \cdot x - 0 \cdot x}_{0} = 0 \cdot x + \underbrace{0 \cdot x - 0 \cdot x}_{0}$$

$$0 = 0 \cdot x + 0 \iff 0 = 0 \cdot x$$

(d) (ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO)

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \text{ oppure } (y = 0)$$

Se non fosse vero $x \neq 0$ e $y \neq 0$
$\Rightarrow$ esistono $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$. Se prendo la relazione

$xy = 0$, moltiplico per $\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} x \cdot y = 0 \cdot \frac{1}{x} = 0 \iff 1 \cdot y = 0 \iff y = 0$$

ASSURDO

Riguardo a "$\geq$"

(e) se $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$

Infatti da $x \geq 0$ sommo $-x$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{x - x}_{0} \geq -x \iff 0 \geq -x$$

(f) se $x \geq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow$

$$xz \leq yz$$

Per dimostrarlo uso il fatto che $-z \geq 0$, moltiplico la dis. per $-z$ e trovo

$$\underbrace{(-z)x}_{-(zx)} \geq \underbrace{(-z)y}_{=\,-(zy)}$$

(si potrebbe dim.)

$$-zx \geq -zy$$

sommo $zx + zy$

$$\underbrace{zx + zy - zx}_{\text{ } zx - zx = 0} \geq zx + \underbrace{zy - zy}_{0} \iff zy \geq zx$$

FINE DEGLI ESEMPI

"COMPLETEZZA" DI $\mathbb{R}$ è espressa da

<u>ASSIOMA DI DEDEKIND</u> Se $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e se

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Allora esiste "un elemento separatore" $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a \leq c \leq b \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

<u>NON È VERO IN $\mathbb{Q}$</u> : Potrei considerare:

$$A = \{ q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \quad e \quad q^2 \leq 2 \}$$

$$B = \{ q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \quad e \quad q^2 \geq 2 \}$$

Si vede che se $\boxed{a \in A \quad e \quad b \in B \implies a \leq b}$
(proprietà della funzione $x \to x^2$)

MA NON C'È NESSUN c SEPARATORE

(si può dim. che se c esistesse $\Rightarrow c^2 = 2$)

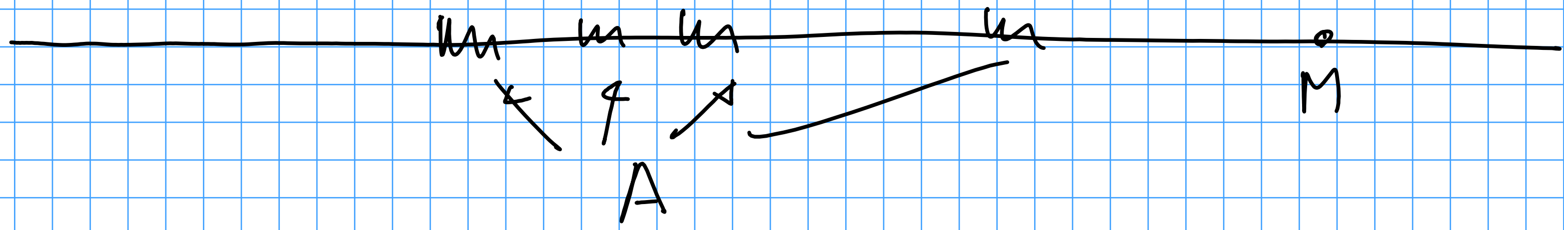
VICEVERSA L'ASSIOMA VALE IN $\mathbb{R}$
(perché lo stiamo assumendo noi)

CHE COSA CI DÀ QUESTO ASSIOMA

<u>ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE</u> ?!

Prendiamo un insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

<u>DEFINIZIONE</u> • Chiamo *maggiorante di A* un numero M tale che $M \geq a \quad \forall a \in A$



- Dico che A è *superiormente limitato* se esiste un maggiorante per A

  Notiamo che se M è un maggiorante per A allora ogni $M' \geq M$ è ancora un maggiorante di A

- Dico che $\bar{a}$ è il massimo di A se

$$\bar{a} \in A$$
$$\bar{a} \geq a \quad \forall a \in A$$

Dunque $\bar{a}$ è il massimo di A se e solo se $\bar{a}$ è un maggiorante di A e $\bar{a} \in A$

si SCRIVE $\bar{a} = \max A$

OSS. $A = [0, 1[$ è limitato superiormente MA NON HA massimo. In effetti:

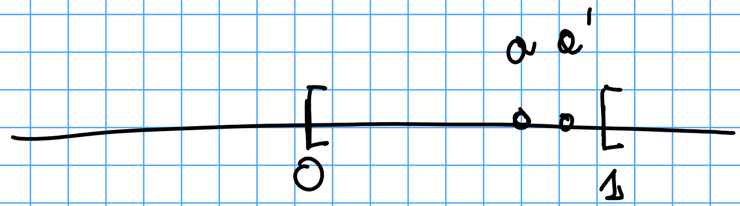
1 è maggiorante di A (per def. di A)

Ma non può esserci nessun $\bar{a}$ in A tale che $\bar{a} \geq a \ \forall a$. INFATTI per ogni $a \in A$ (cioè per ogni a con $0 \leq a < 1$) si può prendere

$a' = \frac{1+a}{2}$ = pto medio tra a e 1

$\Rightarrow \ a < a' < 1$

$\Rightarrow \ a' \in A$ e $a' > a$



DUNQUE NON È POSSIBILE TROVARE $\bar{a}$

DEF. Se A è limitato superiormente chiamo estremo superiore di A ($\sup A$) il

<u>minimo dei maggioranti di A</u>

(minimo di B = elemento $\bar{b} \in B$ tale che $\bar{b} \leq b \ \forall b \in B$)

Questa definizione è BEN POSTA dato che si dimostra che $\sup A$ ESISTE SEMPRE (se $A \neq \emptyset$, A limitato sup.)

INFATTI

chiamo $B = \{ M \in \mathbb{R} : M \geq a \quad \forall a \in A \}$

$(B = \{ \text{maggioranti di } A \})$

- $A \neq \emptyset$ per ipotesi
- $B \neq \emptyset$ perché A è limitato sup. (cioè esiste almeno un maggiorante)
- se $a \in A$ e $b \in B$ $\Rightarrow$

$a \leq b$ (def. di B!)

Per Dedekind esiste $c \in \mathbb{R}$ con

$$\underbrace{a \leq c}_{①} \underbrace{\leq b}_{②} \qquad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

La ① dice che c è un maggiorante di A
$(c \in B)$

La ② dice che ogni maggiorante b deve verificare $b \geq c$ $\Rightarrow$ c è il <u>minimo dei maggioranti</u>

<u>ESEMPIO</u> Se $A = [0, 1[$. Allora

$B = \{\text{maggioranti di } A\} = [1, +\infty[$. Infatti

(1) se $c \in [1, +\infty[$ $\Rightarrow$ $c \geq 1$ $\Rightarrow$ $c \geq a$ $\forall a \in [0,1[$

(2) se c è maggiorante $\Rightarrow$ non può essere $c < 1$:

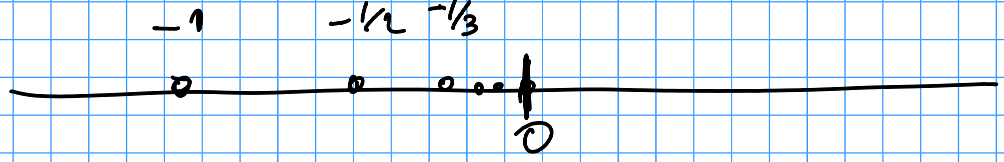
per quanto visto sopra se $c < 1$ troverei un punto a $\left(= \frac{c+1}{2}\right)$ tale che $a \in A$ $a > c$

CONTRO L'IPOTESI CHE c sia maggiorante

QUINDI c maggiorante $\Rightarrow$ $c \geq 1$

Ne segue $\sup [0, 1[= \min [1, +\infty[= 1$ (ovvio)

<u>ESEMPIO</u> $A = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \dots -\frac{1}{n} \dots \right\} = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$



si vede che $\sup A = 0$ (PROVARE A DIMOSTRARLO)

(i maggioranti di A formano $[0, +\infty[$)

ESEMPIO $\mathbb{N} = \{$ numeri interi $\}$ NON È LIMITATO SUP.

COME MAI ?

Se fosse limitato sup. potrei considerare $N = \sup \mathbb{N}$

(N = minimo dei maggioranti di $\mathbb{N}$) :

$$N \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

MA $N - \frac{1}{2}$ NON È PIÙ MAGGIORANTE $\Rightarrow$

trovo un intero n_0 tale che $n_0 > N - \frac{1}{2}$. Ma

$n_0 + 1$ è ancora in $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{n_0 + 1}_{\text{INTERO}} \geq N - \frac{1}{2} + 1 = N + \frac{1}{2} > N \qquad \text{ASSURDO}$$