Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Seconda lezione, 1 ottobre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

ERRATA CORRIGE

Il TITOLO CORRETTO DEL LIBRO E'

M. BRAMANTI   C.D. PAGANI   S. SALSA
ANALISI MATEMATICA 1

Chi avesse già acquistato l'altro libro può comunque utilizzarlo: vi troverà degli argomenti in più e qualche dimostrazione in meno che però sarà svolta nelle slide.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Altro modo di ottenere la formula: Partiamo da

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 \qquad \left(1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \right)$$

$$\parallel$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} i^2} + (n+1)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 = \left((0+1)^2 + (1+1)^2 + \dots + (n+1)^2 \right)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i^2 + 2i + 1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 =$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n} i^2} + 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1$$

DUNQUE

n+1 ADDENDI, quando i varia tra 0 e n

$$(n+1)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i + n + 1$$

$$\iff (m+1)^2 - (m+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\iff \frac{(m+1)(m+1-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\parallel$$

$$\frac{(m+1)m}{2}$$

FACCIAMO UN CALCOLO SIMILE PARTENDO DA

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^3 = \cancel{\sum_{i=1}^{m} i^3} + (m+1)^3 \leftarrow$$

$\parallel$ (traslazione dell'indice)

$$\sum_{i=0}^{m} (i+1)^3 = \sum_{i=0}^{m} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} i^3 + 3\sum_{i=0}^{m} i^2 + 3\sum_{i=0}^{m} i + \sum_{i=0}^{m} 1 =$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{m} i^3} + 3\sum_{i=1}^{m} i^2 + 3\sum_{i=1}^{m} i + \sum_{i=0}^{m} 1 \leftarrow$$

DUNQUE

$$(n+1)^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \Longleftrightarrow$$

$$(n+1)^3 - \frac{3}{2}\,n\,(n+1) - (n+1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\,(n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}\,n - 1\right] =$$

$$\frac{1}{6}\,(n+1)\left[2\,(n^2+2n+1) - 3n - 2\right] =$$

$$\frac{1}{6}\,(n+1)\left(2n^2+4n+2-3n-2\right) =$$

$$\frac{1}{6}\,(n+1)\left(2n^2+n\right) = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$$

HO TROVATO

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si potrebbe dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^{n} i^K = \text{polinomio di grado } K+1$$

ALTRO ESEMPIO

$$1+3+5+7 = 16 = 4^2$$

$$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \quad ?!$$ IN EFFETTI

$$2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{2\, n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

SOMMA DELLA PROGRESSIONE GEOMETRICA

DATO $A \in \mathbb{R}$ VOGLIO CALCOLARE

$$A^0 + A^1 + A^2 + \dots + A^n$$

(LA "SUCCESSIONE" $1, A, A^2, A^3 \dots ,$ si dice PROGESSIONE GEOMETRICA DI RAGIONE A)

PIU' IN GENERALE VEDIAMO : se $A, B \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{A^{n+1}-B^{n+1} = (A-B)\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}B^{i}} =$$

$$(A-B)\Big(\underset{\uparrow\; i=0}{A^{n}} + \underset{\uparrow\; i=1}{A^{n-1}}B + \underset{\uparrow\; i=2}{A^{n-2}}B^{2} + \dots \underset{\uparrow\; i=n-1}{AB^{n-1}} + \underset{\uparrow\; i=n}{B}\Big)$$

(se $n=1$ ho $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

se $n=2$ ho $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ --)

Dimostriamo la formula sopra:

$$(A-B)\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}B^{i} = A\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}B^{i} - B\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}B^{i} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} A^{n+1-i}B^{i} - \sum_{i=0}^{n} A^{n-i}B^{i+1} =$$

la chiamo k

$i = k-1$

$$\left(A\sum_{0}^{n} A^{n-i}B^{i} = \sum \underbrace{A\cdot A^{n-i}}_{A^{n+1-i}} B^{i}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} A^{n+1-i}B^{i} - \sum_{k=1}^{n+1} A^{n+1-k}B^{k} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} A^{n+1-i}B^{i} - \sum_{i=1}^{n+1} A^{n+1-i}B^{i} =$$

$$A^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \cancel{A^{n+1-i}} B^{i} - \left(\sum_{i=1}^{n} \cancel{A^{n+1-i}} B^{i} + B^{n+1} \right) =$$

$i=0$ nello I° sommatorio $\qquad\qquad$ $i=n+1$ nello II° sommatorio

$$A^{n+1} - B^{n+1}$$

IDEA :

$$(A-B)\left(A^{n} + A^{n-1}B + \dots + AB^{n-1} + B^{n}\right) =$$

$$A^{n+1} + \cancel{A^{n}B} + \dots + \cancel{A^{2}B^{n-1}} + \cancel{AB^{n}}$$

$$- \left(\cancel{A^{n}B} + \dots - \cancel{A^{2}B^{n-1}} + \cancel{AB^{n}} + B^{n+1}\right) = A^{n+1} - B^{n+1}$$

SE METTO $A = 1$ VIENE

$$1 - B^{n+1} = (1-B) \sum_{i=0}^{n} B^{i} \iff \left(B^{n+1} - 1\right) = (B-1) \sum_{i=0}^{n} B^{i}$$

$\Rightarrow$ RICAVO LA SOMMA : $\boxed{\sum_{i=0}^{n} B^{i} = \dfrac{1 - B^{n+1}}{1 - B}}$ $\left(= \dfrac{B^{n+1} - 1}{B - 1} \right)$

Per esempio $\qquad B = \frac{1}{2} \qquad$ si ottiene

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} \qquad \left(= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

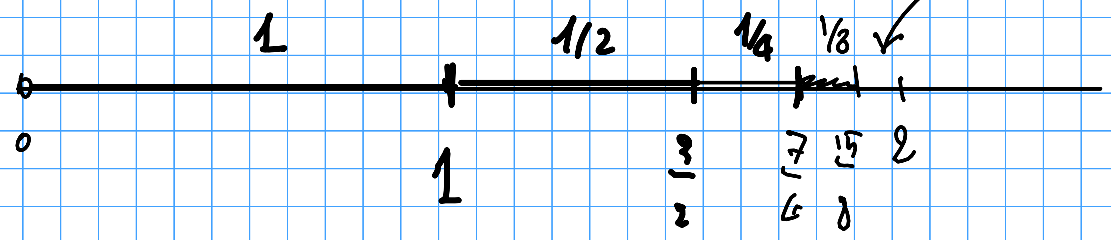
$$\|$$

$$\frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2^n}$$

VISUALIZZAZIONE!

MANCA $\frac{1}{2^n}$ per arrivare a 2



Quando manderemo $n \to \infty$ troveremo $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$

PIU' IN GENERALE VEDREMO CHE $\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} A^M = \frac{1}{1-A} \quad \text{SE } -1 < A < 1}$

FATTORIALE / COEFF. BINOMIALI

FATTORIALE DI n $(n \in \mathbb{N})$ È IL PRODOTTO

$$n! = 1 \cdot \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ FATTORI}}$$

CONVENZIONE $\boxed{0! = 1}$

$n!$ rappresenta il numero di "PERMUTAZIONI" di un insieme di n elementi (CONTA L'ORDINE)

<u>FORMALMENTE</u> UNA PERMUTAZIONE DI UN INSIEME A è una funzione BIGETTIVA $\sigma : A \to A$

$n = 3$ $\quad A = \{a, b, c\}$ $\quad$ le permutazioni sono

(a, b, c) $\quad (a, c, b)$

(b, a, c) $\quad (b, c, a)$ $\quad$ $\leftarrow$ 6 $\quad (= 3!)$

(c, a, b) $\quad (c, b, a)$

COEFFICIENTE BINOMIALE: DATI $n, k \in \mathbb{N}$ $k \leq n$

$$\binom{n}{k} := \underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}\qquad \left(= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots k}\right)$$

$\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di COMBINAZIONI DI n elementi su k posti (NON CONTA L'ORDINE)

<u>FORMALMENTE</u> vuol dire contare quanti SOTTOINSIEMI DI k elementi si possono formare a partire da un insieme con n elementi

$A = \{a, b, c\}$ $(n = 3)$ $k = 2$

$\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$ <u>TRE</u> $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3\cdot\cancel{2}\cdot 1}{1\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 3$

k può essere 0, $\binom{n}{0} = 1$ (c'è un solo sottoinsieme con 0 el. cioè $\emptyset$)

PROPRIETÀ DEI BINOMIALI

- $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- PIU' IN GENERALE

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{(basta guardare la definizione)}$$

- $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq n$$

DIM.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} =$$

$$(n-(k-1) = n+1-k)$$

$$\begin{cases} k! = (k-1)!\,k \\ (n-k+1)! = (n-k)!\,(n-k+1) \end{cases}$$

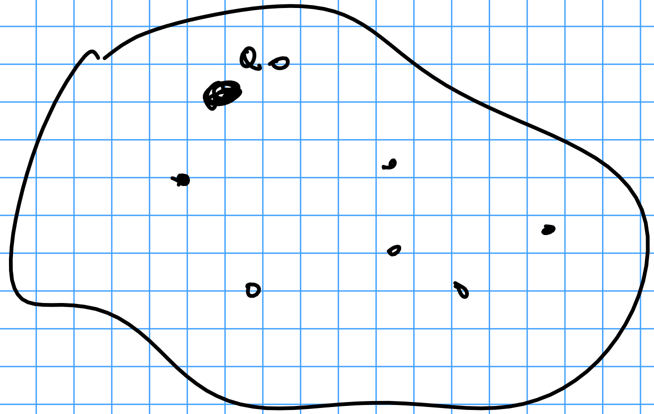
$$\frac{n!}{(k-1)!\,k\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,(n+1-k)}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right) =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\,\frac{n+1\cancel{-k}+\cancel{k}}{k\,(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

INTERPRETAZIONE: Se A contiene $n+1$ elementi posso isolarne 1, chiamiamolo a_0.

Sia $0 \le k \le n$. Posso classificare i sottoinsiemi di A con k elementi in due categorie



A

$$\mathcal{A}_1 = \{ B \subset A,\ B \text{ ha } k \text{ elementi},\ a_0 \in B \} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{ B \subset A,\ B \text{ ha } k \text{ elementi},\ a_0 \notin B \}$$

→ Un oggetto di $\mathcal{A}_1$ è individuato dagli $k-1$ elementi diversi da a_0 $\Longrightarrow$ è lo stesso di contare i sottoinsiemi di $A \setminus \{a_0\}$ con $k-1$ elementi $\Longrightarrow$ $\binom{n}{k-1}$

→ Un oggetto di $\mathcal{A}_2$ è individuato da k elementi in $A \setminus \{a_0\}$ cioè $\binom{n}{k}$

$+ \quad = \binom{n+1}{k}$

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ $\qquad 1 \le k \le n$

- INSIEME AL FATTO CHE $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$

$\Rightarrow$ TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$n=0$	1	solo $k=0$
$n=1$	1 1	$k=0,\ k=1$
$n=2$	1 2 1	$\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}$
$n=3$	1 3 3 1	
$n=4$	1 4 6 4 1	
$n=5$	1 5 10 10 5 1	

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0}$$

I BINOMIALI SERVONO PER LA POTENZA n-esima di un binomio

FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i} =$$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

VEDI TRIANGOLO DI TARTAGLIA

PER ESEMPIO $\quad (a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$

IDEA:

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}^{n \text{ VOLTE}} =$$

SOMMA DI TANTI ADDENDI OGNUNO DEI QUALI È UN PRODOTTO DI n FATTORI CHE POSSONO ESSERE o a oppure b :

- IL TERMINE a^n SI PUÒ COSTRUIRE IN UN SOLO MODO (prendendo sempre a !)
- IL TERMINE $a^{n-1}b$ SI PUÒ FORMARE IN n modi diversi, scegliendo a quale posso prendere b
- IL TERMIE $a^{n-2}b$ SI PUÒ FARE IN $\binom{n}{2}$ MODI DIVERSI DECIDENDO I DUE POSTI (su n) IN CUI USARE b

⋮

IN GENERALE: $a^{n-k}b^k$ compare $\binom{n}{k}$ volte.

TORNIAMO AI DISCORSI "ASTRATTI".

ABBIAMO VISTO CHE UN INSIEME è definito da una proprietà $p(a)$ che individua i suoi elementi

$$A = \{a : p(a)\}$$

INSIEMI $\longleftrightarrow$ PROPRIETÀ LOGICHE

$$A \cup B \longleftrightarrow p(a) \vee q(a)$$

$$A \cap B \longleftrightarrow p(a) \wedge q(a)$$

$$A^c \longleftrightarrow \text{non-}p(a)$$

$\vee$, $\wedge$, NON (CONNETTIVI LOGICI) permettono di costruire delle proprietà più complicate ...

$\vee$ = "o"

$\wedge$ = "e"

NON

SI PUÒ USARE LA TABELLA DI VERITÀ

$p \vee q$		p: V	p: F
q	V	V	V
	F	V	F

$p \wedge q$		p: V	p: F
q	V	V	F
	F	F	F

		NON p
p	V	F
	F	V

OLTRE AI CONNETTIVI SERVONO I

QUANTIFICATORI $\forall$ $\exists$ ("per ogni" / "esiste")

Se $p(a)$ è una proprietà che dipende da una "variabile" a $\Rightarrow$

"$\forall a\ p(a)$" È VERA se e solo se $p(a)$ è vero per ogni a

"$\exists a\ p(a)$" È VERA se e solo se c'è un a che rende vero $p(a)$

FORMALMENTE: $p(a)$ può essere vero / falso A SECONDA DI CHI È a

INVECE $\forall a\ p(a)$ NON DIPENDE DA a

ESEMPIO $p(n)$ = "n è pari"

$p(1)$ è falso

$p(2)$ è vero

$\forall n \; p(n)$ È FALSA (non è vero che tutti i numeri sono pari)

$\exists n \; p(n)$ È VERA (esiste effettivamente un numero pari)

Per esempio possiamo definire

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x < \frac{1}{n}) \} = \; ??$$

allora $A =]-\infty, 1[$

PER DIMOSTRARLO VERIFICO DUE INCLUSIONI :

(a) $A \subset]-\infty, 1[$ (b) $]-\infty, 1[\subset A$

(b) se prendo $x \in]-\infty, 1[$, cioè $x < 1$, devo trovare un numero n intero, $n \neq 0$ tale che $x < \frac{1}{n}$

BASTA PRENDERE $n = 1$!!

(a) prendo $x \in A \Rightarrow \exists$ n intero, $n \neq 0$ per cui $x < \frac{1}{n}$

MA ALLORA $x < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in]-\infty, 1[$

FINE

ALTRO ESEMPIO

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} : \left(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ si ha } x < \frac{1}{n} \right) \right\}$$

DICO CHE $B =]-\infty, 0]$

PER VEDERLO DIMOSTRO LE DUE INCLUSIONI

(a) $B \subset]-\infty, 0]$ (b) $]-\infty, 0] \subset B$

(b) se $x \in]-\infty, 0] \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow x < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(a) sia $x \in B$, voglio dimostrare che $x \leq 0$. Se no $x > 0$

Ma se $x > 0$ $\frac{1}{x} > 0$ ($\frac{1}{x}$ esiste perché $x \neq 0$) $\Rightarrow$ POSSO TROVARE UN INTERO $n > \frac{1}{x}$ (quindi $n \neq 0$). PASSANDO AL RECIPROCO

$\frac{1}{n} < x \Rightarrow x \notin B$ ASSURDO $\Rightarrow x \leq 0$

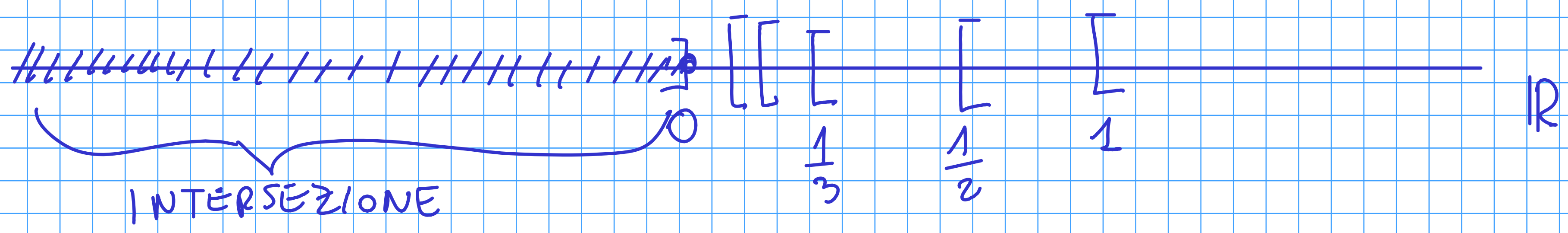
OSSERVAZIONE Nella dim. di (a) si è usato:

- NON $(\forall n \ p(n))$ equivale a $\exists n$ NON-$p(n)$
- NON $(\exists n \ p(n))$ equivale a $\forall n$ NON $p(n)$

OSSERVAZIONE POTREI SCRIVERE

$$]-\infty, 0] = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0}}]-\infty, 1/n[$$

= intersezione di tutti gli insiemi $]-\infty, 1/n[$ al variare di n in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$



INVECE IL PRIMO ESEMPIO CORRISPONDE A DIRE

$$]-\infty, 1[\;=\; \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq 0}}]-\infty, 1/n[$$

(RIGUARDO ALLE FUNZIONI) $f: A \to B$

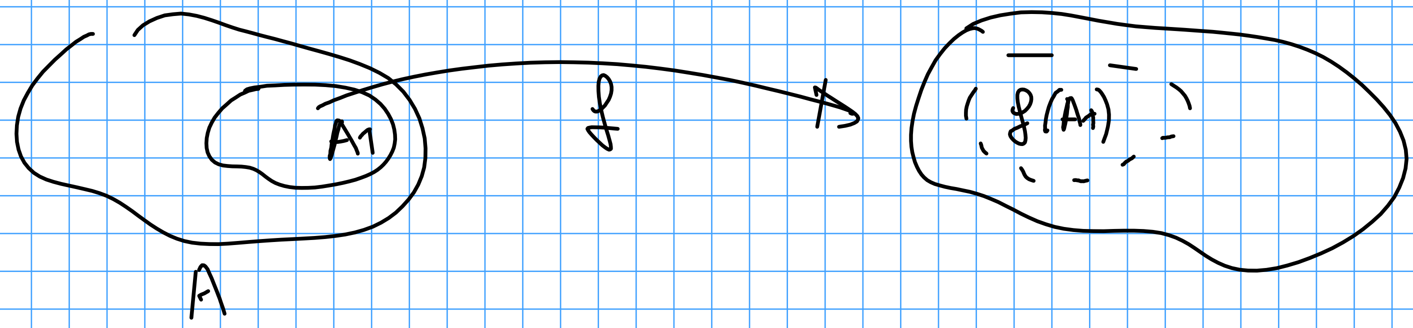
<u>NOTAZIONI</u>

Se $A_1 \subset A$ chiamo IMMAGINE DI A_1 tramite f

l'insieme $\{ b \in B : \exists\, a \in A_1 \text{ con } f(a) = b \}$

= punti b in B che "provengono" da punti di A_1

TALE INSIEME SI INDICA CON $f(A_1)$



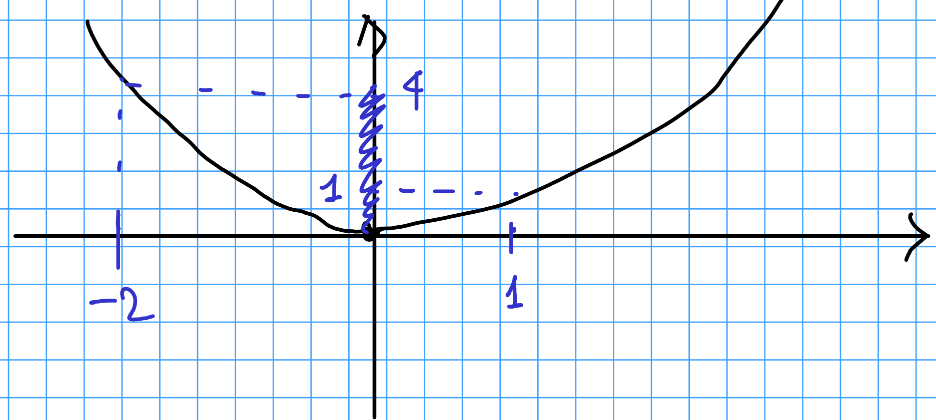
Se $A_1 = A$ allora $f(A)$ si chiama l'immagine di f

Per esempio se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$

$\Rightarrow \quad f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$

(lo vedremo)

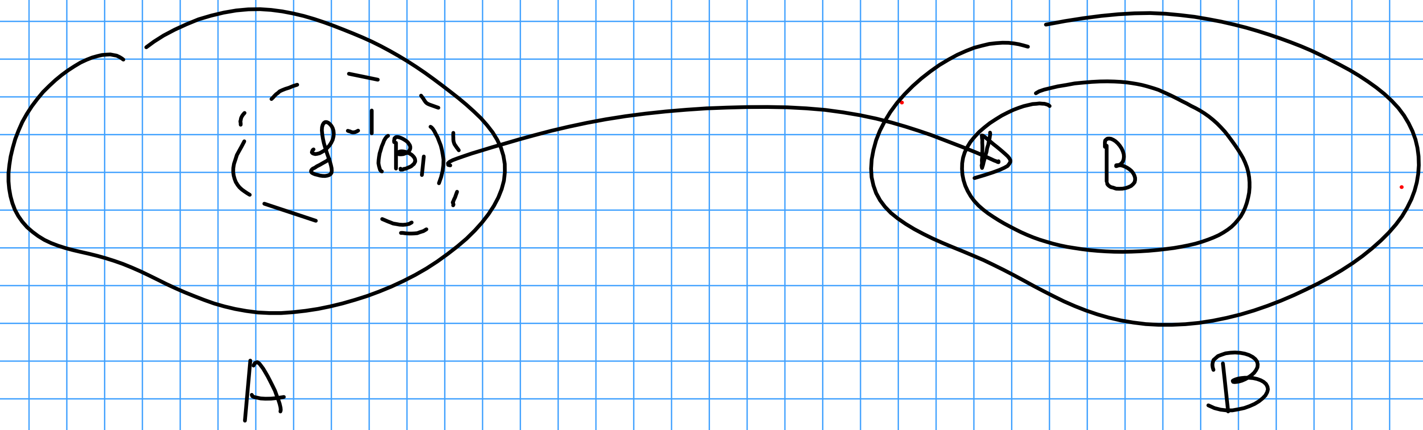
$f([-2, 1[) = [0, 4]$



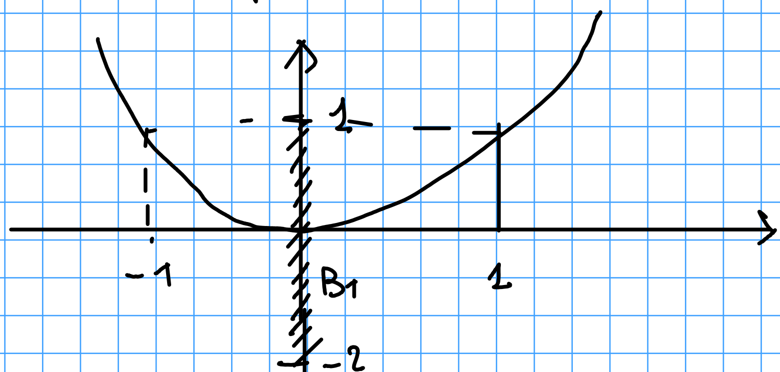
Se invece $B_1 \subset B$ definisco la CONTROIMMAGINE di B_1 tramite f, nel seguente modo

$$f^{-1}(B_1) := \{ a \in A : f(a) \in B_1 \}$$

NON È DETTO CHE f^{-1} esista come funzione — $f^{-1}(B_1)$ si può fare comunque). Se però f è bigettiva, $\Rightarrow f^{-1}$ esiste, allora la controimmagine di B_1 tramite f COINCIDE CON l'immagine di B_1 tramite f^{-1} e quindi la scrittura $f^{-1}(B_1)$ NON È AMBIGUA.



$f^{-1}(B_1)$ può essere $\emptyset$.



$f(x) = x^2$ da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}([-2,1]) = [-1,1]$$

TORNIAMO SULLA NOZIONE DI FUNZIONE INVERSA

PERCHÉ SI POSSA DEFINIRE f^{-1} OCCORRE che f SIA

- INIETTIVA
- SURGETTIVA

TUTTO QUESTO SOTTINTENDE UNA COSA IMPORTANTE!

Nella nozione di funzione devono essere presenti:

"la regola $x \mapsto f(x)$" / il DOMINIO / il CODOMINIO

Con questo formalismo le funzioni

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,,\quad f(x) = x^2 \qquad / \qquad g : \mathbb{R} \to [0,+\infty[\quad g(x) = x^2$$

$$h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[\quad h(x) = x^2$$

SONO FUNZIONI DIVERSE

f NON È INIETTIVA, NON È SURGETTIVA,

g È SURGETTIVA, NON È INIETTIVA

h È BIGETTIVA

h è LA "RESTRIZIONE" DI g a $[0, +\infty[$

Def. Se $f: A \to B$ e $A_1 \subset A$ chiamo "restrizione" di f ad A_1 la funzione $g: A_1 \to B$ definita da $g(a) = f(a) \quad \forall a \in A_1$

È ABBASTANZA CHIARO CHE, data $f: A \to B$ posso porre
$g: A \to f(A)$ (con $g(a) = f(a) \ \forall a \in A$) e g è surgettiva

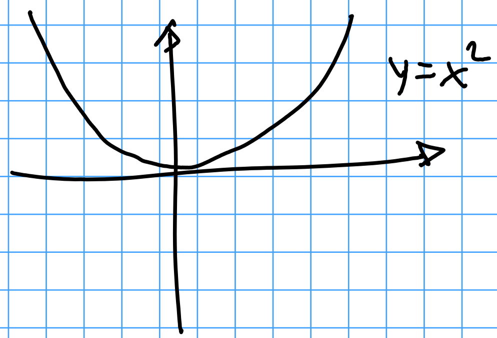
OGNI FUNZIONE SI PUÒ PENSARE SURGETTIVA SE SI SOSTITUISCE $f(A)$ a B

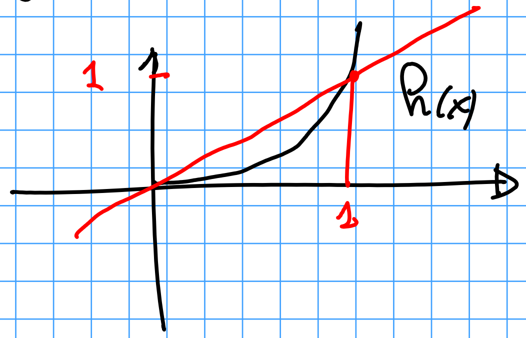
IL PROBLEMA SARÀ DI VEDERE ESPLICITAMENTE CHI È $f(A)$

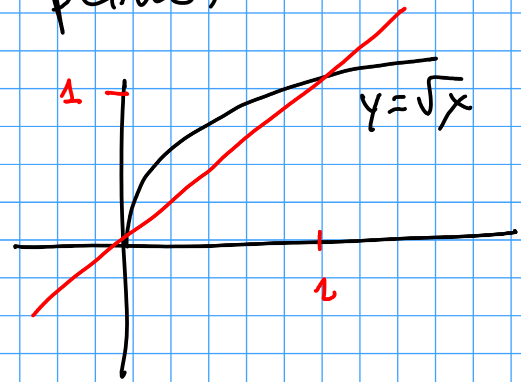
PER QUANTO RIGUARDA L'INIETTIVITÀ SI PUÒ CERCARE (CASO PER CASO) DI TROVARE UNA RESTRIZIONE (SIGNIFICATIVA)

CHE SIA INIETTIVA.

Nell'esempio di $x \mapsto x^2$ si sceglie di restringersi su $[0,+\infty[$ e si costruisce la funzione RADICE QUADRATA come inversa di tale restrizione (la funzione "h" scritta prima)







IL GRAFICO DI f^{-1} si ottiene riflettendo il grafico di f rispetto alla bisettrice $y=x$

STESSO DISCORSO per $\sqrt[k]{x}$ con k PARI

MENTRE SE k è DISPARI IL PROBLEMA NON C'È

$x \mapsto \sqrt[3]{x}$ è l'inverso di x^3 su $\mathbb{R}$

ATTENZIONE ALL'AMBIGUITÀ

f^{-1} NON È $\frac{1}{f}$

(a meno che non sia chiaro dal contesto)