Analisi Matematica I

prof. Claudio Saccon (*)

Prima lezione, 30 settembre 2011

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

INFORMAZIONI UTILI

PROGRAMMA: reperibile sul sito del docente a

http://saccon.blog.dma.unipi.it/informazioni-sul-corso-di-analisi-uno/

LIBRO (consigliato, ma vanno bene anche altri equivalenti):

M.Bramanti, C.D.Pagani, S. Salsa
Analisi Matematica 1, ZANICHELLI

Verranno anche fornite delle note da scaricare dal sito del docente, relativamente ad alcuni argomenti non coperti interamente dal libro (serie di potenze, equazioni differenziali).

LIBRO DI ESERCIZI: Uno qualunque tra quelli in commercio - anche in questo caso è possibile scaricare dal sito esercizi e i compiti d'esame degli anni passati.

MODALITA' DELL'ESAME: L'esame prevede uno scritto e un orale.
Durante l'anno verranno tenute due prove intermedie ("compitini"),
il superamento delle quali consente di non fare la prova scritta.
Ci saranno anche dei meccanismi che permetteranno di usare solo
uno dei compitini (in caso che l'altro non sia stato sufficiente):
per i dettagli vedere sul sito le modalità dell'esame.

QUESTE SLIDES compariranno anch'esse sul sito,

http://saccon.blog.dma.unipi.it

alla voce "Lezioni di Analisi uno 2011/12", nei giorni successivi alle
lezioni.

Ogni lunedì dalle 8.30 (salvo avviso contrario) c'è un RICEVIMENTO
(Dipartimento di Matematica Applicata, Via Buonarroti 1/c)

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

$f(x)$ $\qquad$ x reale

$f(x)$ reale

Per esempio la traiettoria di un p.to al variare del tempo, è descritta da tre funzioni

$$x(t) \quad y(t) \quad z(t)$$

t = tempo $\qquad$ (x, y, z) coordinate spaziali

Scopriremo il concetto di: LIMITE ....

INSIEMI E LE FUNZIONI

(concetti "primitivi" che si danno per noti)

A è un insieme se è "una collezione di elementi". SI USA SCRIVERE

$\boxed{a \in A}$ per indicare che a è un elemento dell'insieme A:

"a APPARTIENE ad A"

UN INSIEME È NOTO QUANDO SONO NOTI TUTTI I SUOI ELEMENTI; QUANDO È NOTA UNA REGOLA CHE PERMETTE DI STABILIRE SE UN ELEMENTO GENERICO APPARTIENE O MENO ALL' INSIEME

$\uparrow$

NOTA: CI VUOLE UN "AMBIENTE" PRESTABILITO

$\mathcal{U}$ (UNIVERSO)

MODI PER DEFINIRE UN INSIEME

(1) ELENCARE TUTTI I SUOI ELEMENTI

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

(2) Dare una legge che individua gli elementi di A: se $p(a)$ è una proprietà che, a seconda di a, può essere vera o falsa, si può introdurre

$$A = \{ a : p(a) \}$$

"l'insieme degli elementi a tali che vale $p(a)$",

Per esempio

$$A = \{ n : \text{"} n \text{ intero"}, \text{"} n \text{ dispari"}, \text{"} n \leq 7 \text{"} \}$$

INDIVIDUA LO STESSO INSIEME DI PRIMA

$$\{1, 3, 5, 7\}$$

- $\emptyset$ = INSIEME CHE NON CONTIENE NESSUN ELEMENTO, dato dalla proprietà

$p_0(a)$ FALSA per ogni a

- $\mathcal{U}$ = (AMBIENTE) = dato dalla proprietà

$P_1(a)$ VERA per ogni a

- Dati A e B insiemi si dice che "A è contenuto in B" $\boxed{A \subset B}$ se ogni elemento di A è anche elemento di B

- $A = B$ se e solo se $A \subset B$ e $B \subset A$

(in certi testi si usa $\subseteq$)

- Dati A e B insiemi definisco

UNIONE $A \cup B = \{x : (x \in A) \text{ oppure } (x \in B)\}$

INTERSEZIONE $A \cap B = \{x : (x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$

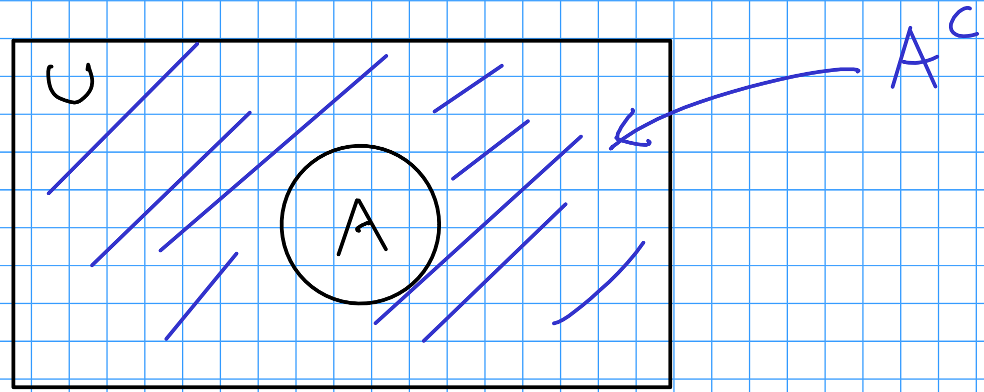
DIFFERENZA $A \setminus B = \{x : (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$

($\notin$ SI LEGGE "NON APPARTIENE")

COMPLEMENTARE CA, oppure $A^c = \{x : x \notin A\}$

sottinteso che $x \in U$: IL COMPLEMENTARE DIPENDE DALL'AMBIENTE

$\Longrightarrow \quad A \setminus B = A \cap B^c$

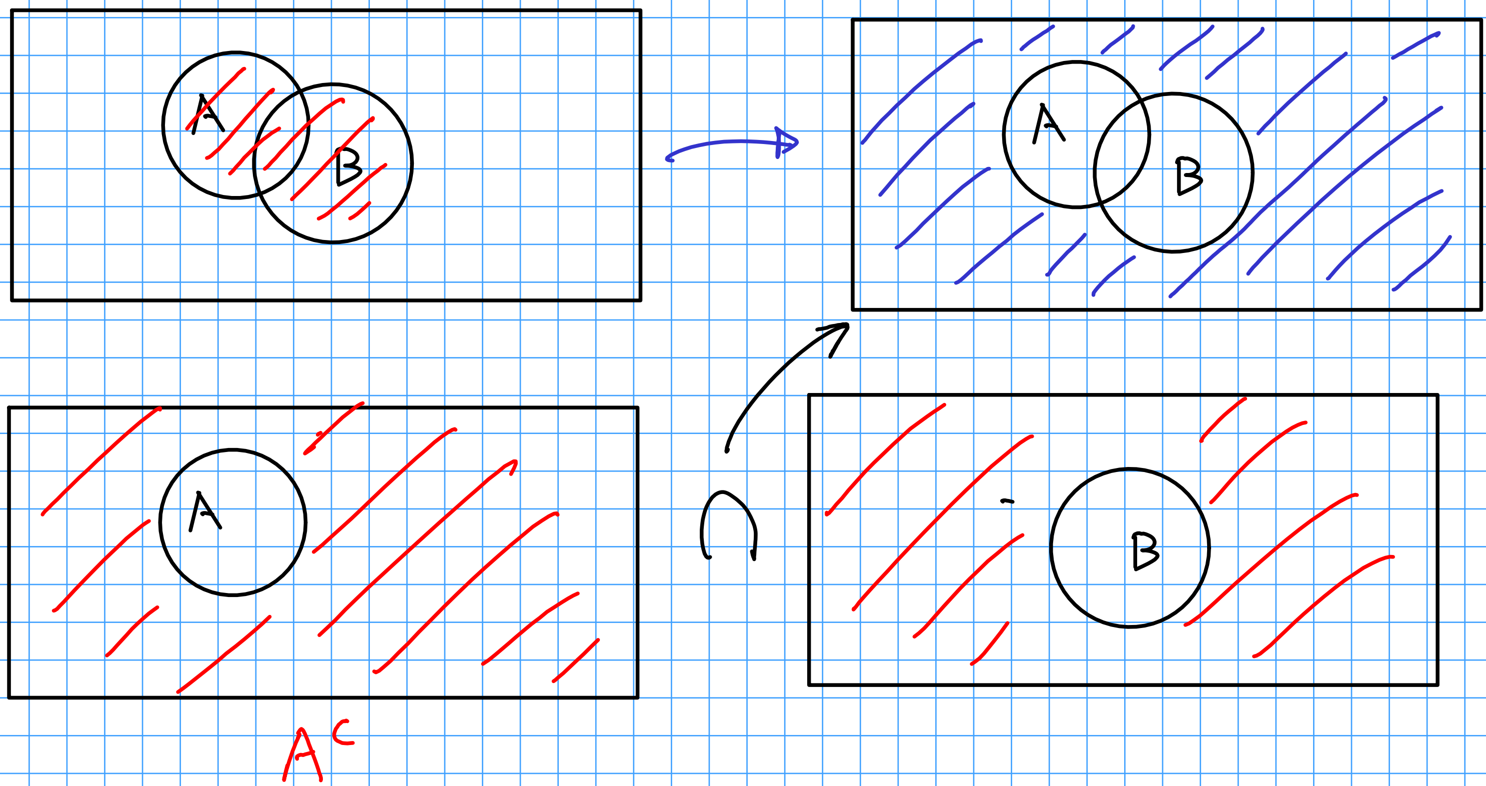


LEGGI DE MORGAN :

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

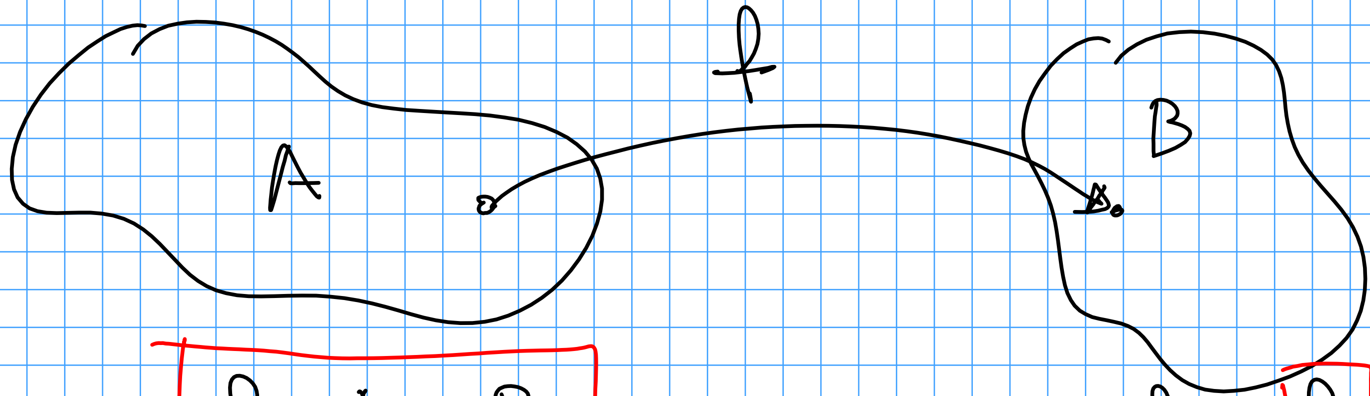
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Vediamone una "col disegno": $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



FUNZIONI

Una funzione è una "legge" (o "corrispondenza") che ad ogni elemento di un insieme A (DOMINIO) associa un elemento di un insieme B (CODOMINIO)



Si scrive $\boxed{f : A \to B}$ per esprimere che $\boxed{f}$ è una funzione avente A come DOMINIO e B come CODOMINIO.

Se $a \in A$ il corrispondente elemento di B si chiama VALORE di f in A o anche L'IMMAGINE di a TRAMITE f e lo indico con $\boxed{f(a)}$

<u>NOTA</u> La funzione si indica con $\boxed{f}$ mentre $f(a)$ è il valore di f in a

Questa regola è spesso infranta - si usa scrivere x^2 per indicare la funzione f definita da $f(x) = x^2$

ATTENZIONE NON È IMPORTANTE IL NOME DELLA VARIABILE (INDIPENDENTE): scrivere

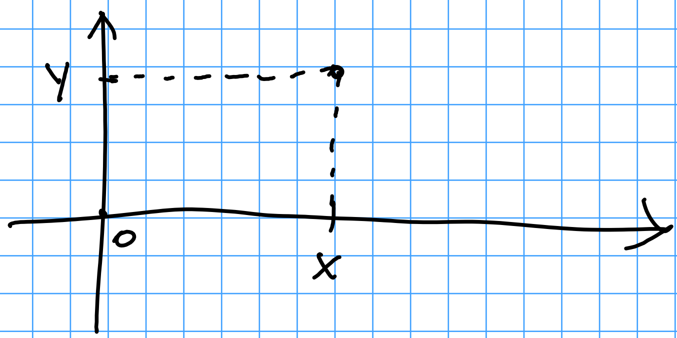
$$f(x) = x^2 \quad o \quad f(z) = z^2$$

sono modi equivalenti di introdurre la stessa funzione "quadrato"

GRAFICO

Dati A, B chiamo PRODOTTO CARTESIANO tra A e B, $A \times B$ l'insieme delle "coppie ordinate" (a, b) con $a \in A$, $b \in B$

Nel caso in cui A e B siano i reali $\mathbb{R}$, si può visualizzare $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con il piano associando alla coppia (x,y), il punto di coordinate x e y



Data una funzione $f : A \to B$ posso definire il suo "$\boxed{\text{grafico}}$" come $\{(x,y) : y = f(x)\}$ che è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

se $A = B = \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il grafico di f si può visualizzare nel piano:

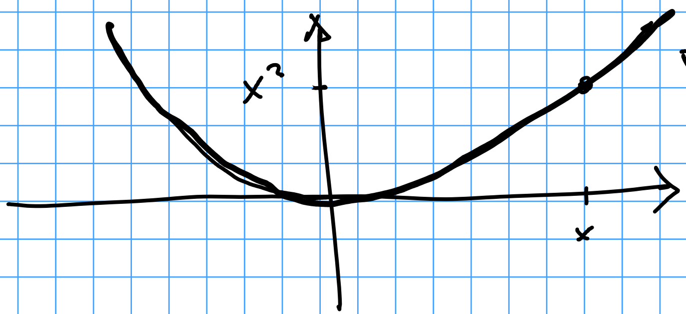


grafico della funzione "quadrato"
$x \mapsto x^2$

$f \Longrightarrow$ grafico di f

viceversa dato un sottoinsieme G di $A \times B$ con l'ulteriore proprietà che se $\begin{matrix}(a,b) \in G \\ (a,c) \in G\end{matrix} \Rightarrow b=c$

è automaticamente definita una $f: A \to B$ che ha G come grafico.

In questo senso il grafico G è "una tabella"

(valore, risultato)

Se A è un insieme finito tale tabella

si può scrivere esplicitamente – x ma ciò non è possibile e per individuare una funzione sono necessario produrre "una regola" che permette

di costruire $f(x)$ a partire da x

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

NOTAZIONI

- $\mathbb{N}$ = INSIEME DEI NUMERI INTERI
  $= \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = INTERI RELATIVI $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = NUMERI RAZIONALI :

$\frac{n}{m}$ con n, m interi $m \neq 0$

$\mathbb{R}$ = NUMERI REALI (ci torniamo sopra)

Se $a, b \in \mathbb{R}$ INTRODUCO GLI "INTERVALLI"

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

$[a, b[= \{x : a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$

$]a, b[= \{x : a < x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x : x \geq a\}$

$$]a, +\infty[\; = \{x : x > a\}$$

$$]-\infty, b] \; = \{x : x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[\; = \{x : x < b\}$$

$$]-\infty, +\infty[\; = \mathbb{R}$$

(i simboli $+\infty$ e $-\infty$, sono solo solo simboli...)

Ovviamente a partire da questi insiemi ne possiamo costruire altri mediante le operazioni insiemistiche descritte all'inizio

<u>ESEMPIO</u> Se voglio risolvere la disequazione

$$x^2 \geq 1$$

posso descrivere le soluzioni scrivendo

$$\{x : (x \geq 1) \text{ oppure } (x \leq -1)\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$
$$= [1, +\infty[\; \cup \;]-\infty, -1]$$

$$\{x : x \neq 0\} =]-\infty, 0[\; \cup \;]0, +\infty[\; = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Alcuni discorsi sulle funzioni.

$$f : A \to B$$

DICO CHE

- f è INIETTIVA se $a \neq b$ IMPLICA $f(a) \neq f(b)$

  (punti distinti danno valori distinti)

NOTA LA TERMINOLOGIA "PUNTI" $\in$ DOMINIO
"VALORI" $\in$ CODOMINIO

- f è SURGETTIVA

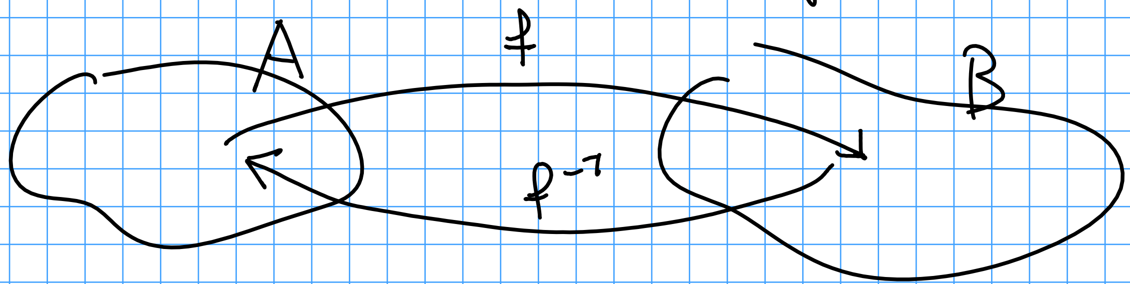
  se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$

  (tutti i valori sono "coperti")

- f è BIGETTIVA se è sia iniettiva che surgettiva. POSSO ALLORA DEFINIRE la funzione INVERSA

$$f^{-1} : B \to A$$

$f^{-1}(b)$ = quell'unico $a \in A$ per cui $f(a) = b$



Cambiamo argomento (per 20 minuti ...)

SOMMATORIA

Dati n numeri $a_1, \dots, a_n$ voglio fare la somma.

Per esempio

$a_1 = 1$ $\quad (n = 5)$

$a_2 = 3$

$a_3 = 6$ ← sto descrivendo una legge tra l'indice $1, \dots, 5$ e il valore

$a_4 = 0$

$a_5 = 3$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 3 + 6 + 0 + 3$

Può essere utile un simbolo che esprime:

FAI LA SOMMA DEGLI a_i QUANDO
i VARIA TRA 1 e 5

QUESTO LO SI SCRIVE COSÌ:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \left(\text{IN GENERALE } \sum_{i=1}^{m} a_i \right)$$

sommatoria degli a_i, quando i varia tra 1 ed m

(se gli a_i sono quelli sopra $\sum_{i=1}^{5} a_i = 1+3+6+0+3 = 13$

Esempio meno banale $\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+4+5+6+7+8$
$+9+10 = ?$

oppure $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = \ldots$

PROPRIETÀ DELLE SOMMATORIE

Siano dati $a_1, \dots, a_n$
$b_1, \dots, b_n$ (tutti reali)
c

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(LINEARITÀ).

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$$

equivale a fare la somma in ordine inverso

se prendo $i=1 \to a_{n-1+1} = a_n$

" " $i=2 \to \quad = a_{n-1}$

" " $i=1 \to \quad = a_n$

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$

(traslazione di indici)

Più in generale $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1-k}^{n-k} a_{i+k}$

(5) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} \quad (1 \le m < n)$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}_{\sum_{i=1}^{m}} + \underbrace{a_{m+1} + \cdots + a_n}_{\sum_{i=m+1}^{n}}$$

Esempio di uso della sommatoria

$$\sum_{i=1}^{n} i \quad (\text{somma dei primi } n \text{ interi})$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \cdots \cdots + 1 \\ \hline \underbrace{101 + 101 + 101 \qquad\qquad 101}_{100} \end{array}$$

$\Rightarrow$ SOMMA DEGLI INTERI DA 1 A 100

FA $\dfrac{100 \times 101}{2}$

CON LE SOMMATORIE :

$$2\sum_{i=1}^{100} i = \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} (100 - i + 1)$$

101

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{100} i} + \sum_{i=1}^{100} 101 - \cancel{\sum_{i=1}^{100} i} = \sum_{i=1}^{100} 101 =$$ sommare

100 volte il numero 101 $= 101 \times 100$ <u>FINE</u>