SUCCESSIONI

Successione	crescente	decrescente	definitivamente cresc.	definitivamente decr.
$a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$	X			
$a_n = \dfrac{n}{n^2+25}$				
$a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$		X		
$a_n = 2^n - n$	X			
$a_n = 4n^3 - 13n$			X	
$a_n = 4n^3 - n^2$				
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$				
$a_n = n^2 + (-1)^n n + 1$				

Tutte le seguenti successioni sono infinitesime (in virtù dei teoremi sui limiti). Trovare per ciascuna di esse un indice n_0 tale che per $n \geq n_0$ si abbia $|a_n| < 10^{-3}$

Successione	n_0		Successione	n_0
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$			$a_n = \dfrac{n}{1+n^2}$	
$a_n = \dfrac{1}{1+n^6}$			$a_n = \dfrac{1}{2^n}$	
$a_n = \dfrac{1}{n!}$			$a_n = \dfrac{2^n}{n^n}$	

Calcolare i seguenti limiti di successioni.

Successione	limite		Successione	limite
$a_n = 4n^4 - 3^3 + 2n^2 - n + 1$			$a_n = n - \sqrt{n}$	
$n - \sqrt{n^3}$			$4n^4 - 3^3 + 2n^2 - n\cos(n) + 1$	
$n - 5\sqrt{n} + \sin(n)$			$n\cos(n) - \sqrt{n^3} - \sin(n)$	
$\dfrac{2n+5}{3n+1}$			$\dfrac{n^4 - n^3 - n + 2}{3n^4 + n^2 - 4n - 7}$	1/3
$\dfrac{2n^4 - n^3\sin(n) - n + 2}{3n^4 + n^2\cos(n^2) - 4n - 5}$			$\dfrac{n^4 - n^3 - \sqrt{n^4+n^2}}{\sqrt{n^6+n^3} - 2n^4}$	
$\dfrac{n^2 + n + \sqrt[3]{8n^6 - 9n^2}}{2n^2 - \sqrt{4n^2+5}}$			$\dfrac{\sqrt{n^4 - n^2 + 3} - \sqrt{n^2+7}}{4n^2 - 2n + 5}$	
$\dfrac{\sqrt[3]{n^4 + n - 7} - \sqrt[4]{n^5 + n^3 - 1}}{\sqrt[5]{n^6 + 64}}$			$\dfrac{\sqrt[4]{n^2 - 3n + 1} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[6]{8n^3 + 4n^2 + 2} - \sqrt[4]{4n+5}}$	

$$\frac{m^4 - m^3 - m + 2}{3m^4 + m^2 - 4m - 7} = \frac{\cancel{m^4}\,(1 - 1/m - 1/m^3 + 2/m^4)}{\cancel{m^4}\,(3 + 1/m^2 - 4/m^3 - 7/m^4)}$$

$$\longrightarrow \frac{1 - 0 - 0 + 0}{3 + 0 - 0 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{n^4+n-7}-\sqrt[4]{n^5+n^3-1}}{\sqrt[5]{n^6+64}} = \frac{n^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}-\frac{7}{n^4}} - n^{\frac{5}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^5}}}{n^{6/5}\sqrt{1+\frac{64}{n^6}}}$$

$$= \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{6/5}} \frac{\sqrt{1+\text{infinitesimi}} - n^{\frac{5}{4}-\frac{4}{3}}\sqrt{1+\text{infinitesimo}}}{\sqrt{1+\text{infinitesimi}}} =$$

$$n^{\frac{2}{15}} \frac{\sqrt{1+\text{inf.}} - n^{-\frac{1}{12}}\sqrt{1+\text{inf.}}}{\sqrt{1+\text{inf.}}}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{4}{3} = \frac{15-16}{12}$$

$$\frac{4}{3}-\frac{6}{5} = \frac{20-18}{15}$$

$$\longrightarrow +\infty \ \frac{1-0}{1} = +\infty$$

$\{a_n\}$ succ. $\{a_n\}$ CRESCENTE $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} \geq a_n$

DECRESCENTE $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} \leq a_n$

(NOTA CRESCENZA / DECRESCENZA SONO "IN SENSO DEBOLE"

SE VOGLIO $a_{n+1} > a_n$ / $a_{n+1} < a_n$ DIRÒ

$\{a_n\}$ È STRETTAMENTE CRESCENTE / DECRESCENTE.

Se $\{a_n\}$ è costante in particolare $\{a_n\}$ è contemporaneamente crescente e decrescente)

(1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$. Devo guardare

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} =$$

$$\frac{\cancel{n^2} + \cancel{n} - (\cancel{n^2} - \cancel{n} + \cancel{2n} - 2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$$

CRESCENTE (addirittura STRETTAMENTE CRESCENTE)

(5) $a_n = 4n^3 - 13n$

$$a_{n+1} - a_n = \dots$$

$$= 12n^2 + 12n - 9$$

Segno di $12n^2 + 12n - 9$??

$$\frac{\Delta}{4} = 36 + 12 \cdot 9 = 36 + 108 = 144$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 12}{12} = \begin{cases} 1/2 \\ -3/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 12n^2 + 12n - 9 \geq 0$ se $\underline{\underline{n \geq 1}}$

VERA DA $n = 1$ IN POI

Se $0 \in \mathbb{N}$ allora non vale per $n=0$

cioè non vale $a_1 \geq 0$

(mentre valgono $a_2 \geq a_1$ $(n=1)$

$a_3 \geq a_2$ $(n=2)$

$\vdots$

DUNQUE È DEF. CRESCENTE

MA NON CRESCENTE

SE SI PRENDE:

$$a_n = n^3 - 20n$$

È MOLTO PROBABILE (VERIFICARE)

CHE $a_{n+1} \geq a_n$ VALGA SOLO

DA UN n_0 IN POI

TROVARE n_0

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

NON È NÉ CRESCENTE NÉ DECRESCENTE

INFATTI a_{2n} $(a_0, a_2, a_4, a_6, \dots)$
$\vee$
0

perché $(-1)^{2n} = 1$

MENTRE $a_{2n+1} < 0$ $(a_1, a_3, a_5, \dots)$

perché $(-1)^{2n+1} = -1$.

Quindi $a_{2n} > 0 > a_{2n+1}$

$a_4 > 0 > a_3$

$a_4 > 0 > a_5$

Si può anche fare come prima:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)+1} - \frac{(-1)^n}{n+1} =$$

$$\frac{-(-1)^n (n+1) - (-1)^n (n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$\frac{-2(-1)^n n - 3(-1)^n}{(n+2)(n+1)} = -\underbrace{(-1)^n}_{\text{alternativamente } -1,\, 1} \underbrace{\frac{2n+3}{(n+2)(n+1)}}_{>0}$$

(è frequentemente >0, ed è frequentemente <0)

$$Q_n = n^2 + (-1)^n n + 1$$

$$Q_{n+1} - Q_n =$$

$$(n+1)^2 + (-1)^{n+1}(n+1) + \cancel{1} - n^2 - (-1)^n n - \cancel{1}$$

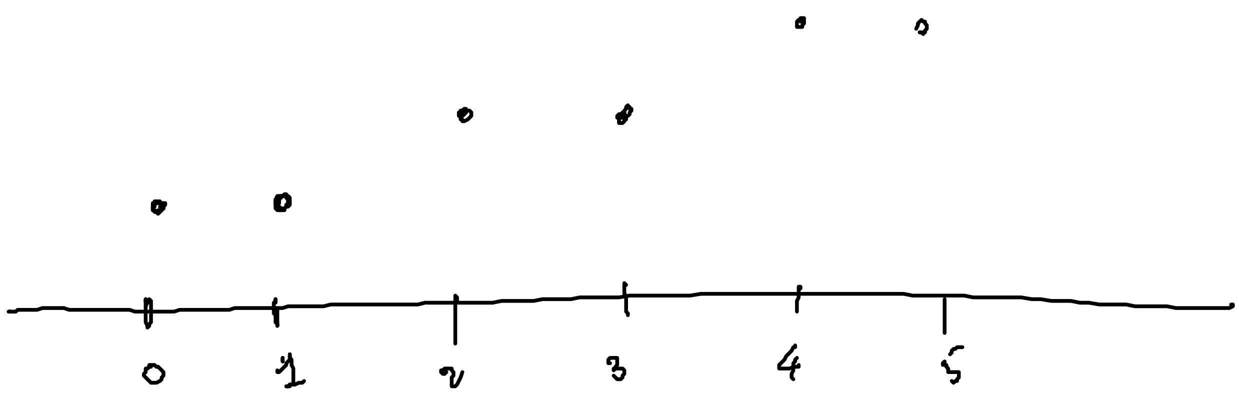
$$= \cancel{n^2} + \underline{2n} + 1 - \underline{(-1)^n n} - (-1)^n - \cancel{n^2} - \underline{(-1)^n n} =$$

$$(2 - 2(-1)^n)n + 1 - (-1)^n =$$

$$2(1-(-1)^n)n + (1-(-1)^n) =$$

$$\underbrace{(1-(-1)^n)}\,[\underbrace{2n+1}_{>0}]$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \quad \longleftarrow \quad 1-(-1)^{2k} = 1-1=0 \\ 2 & n \text{ DISPARI} \quad \longleftarrow \quad 1-(-1)^{2k+1} = 1-(-1) = 2 \end{cases}$$



COMUNQUE È <u>CRESCENTE</u>

(non strettamente).