Analisi Matematica 1
Trentanovesima lezione

Serie di Fourier (cont.).

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://saccon.blog.dma.unipi.it**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 9.00 alle 12.00**

28 aprile 2010

Visto che (sotto opportune ipotesi)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

dove

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad \left(\text{la media di } f(t) \text{ su } [0\ T]\right)$$

(se si riguardano i calcoli fatti ieri si nota che c vale per $n \geq 1$ _il caso $n=0$ va fatto a parte!)

CONSEGUENZA (i passaggi che faccio ora si giustificano con i teoremi di…

$$\int_0^T f^2(t)\,dt = \int_0^T \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \dots\right)$$

$$= \int_0^T \sum_{n,m=0}^{\infty} \big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\big)\big(a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)\big)$$

$$= \int_0^T \sum_{n,m} \Big(a_n a_m \cos(n\omega t)\cos(m\omega t) + a_n b_m \cos(n\omega t)\sin(m\omega t) + a_m b_n \cos(m\omega t)\sin(n\omega t) + b_n b_m \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\Big) =$$

(integro per serie)

$$\sum_{n,m}\Bigg(a_n a_m \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt}_{\begin{cases} 0 & \text{se } n\neq m \\ T/2 & \text{se } n=m\neq 0 \\ T & \text{se } n=m=0 \end{cases}} + a_n b_m \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt}_{=0}$$

$$+ a_m b_n \underbrace{\int_0^T \cos(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt}_{=0} + b_n b_m \underbrace{\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt}_{\begin{cases} 0 & \text{se } n\neq m \\ \frac{T}{2} & \text{se } n=m \end{cases}}\Bigg)$$

$$= a_0^2\, T + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

energia di $f(t)$

somma delle energie delle singole "armoniche"

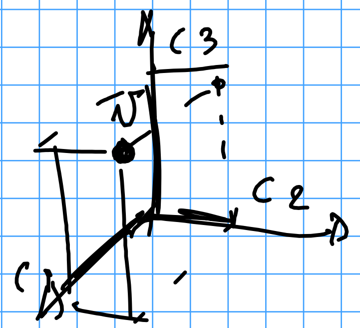
$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

ANALOGIA Se $e_1 \dots e_N$ è una base ortonormale di uno spazio $\mathbb{R}^N$ e $v = c_1 e_1 + \dots + c_N e_N \Rightarrow$

$$\|v\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2$$

$$\Big(\|v\|^2 = v \cdot v = (c_1 e_1 + \dots + c_N e_N)(c_1 e_1 + \dots + c_N e_N) =$$

$$\sum_{i,j} c_i c_j (e_i \cdot e_j) = \sum_i c_i c_i = \sum c_i^2$$



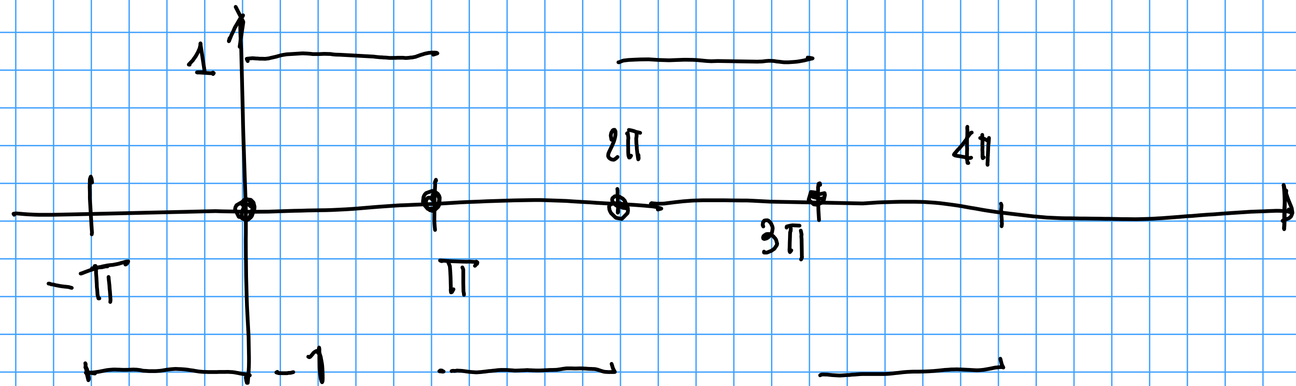
Nel caso delle serie di Fourier devo "pensare a $\int_0^T f(t)g(t)\,dt$ come un prodotto scalare tra f e g". I risultati sulle serie di Fourier esprimono la possibilità di "sviluppare" una f rispetto alla "base" formata da $\sin(n\omega t)$ e $\cos(n\omega t)$

ALCUNI ESEMPI

$T = 2\pi \implies \omega = 1$

f "onda quadra"

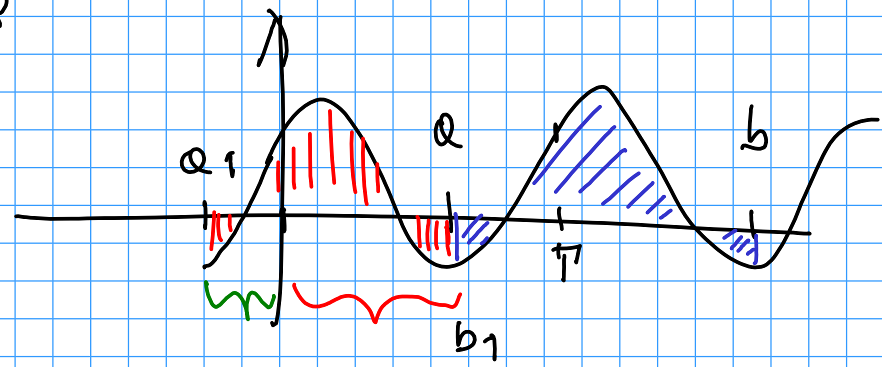
Regolare a tratti: RICADE NEL TEOREMA DI IERI



<u>OSS.</u> Tutti gli integrali su $[0,T]$ possono essere fatti su $[a,b]$ con $b-a=T$: dato che l'integrando è T-periodico

il risultato è lo stesso. In effetti se $h(t)$ T-periodica e $b-a=T$. Scelgo K intero tale che

$$\underbrace{a-KT}_{a_1} \le 0 < \underbrace{b-KT}_{b_1}$$



e sostituisco $s = t - KT \Rightarrow ds = dt$

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_{a_1}^{b_1} h(s+KT)\,ds = \int_{a_1}^{b_1} h(s)\,ds =$$

$$\int_{a_1}^{0} h(s)\,ds + \int_0^{b_1} h(s)\,ds$$, Nel primo dei due sostituisco $r = s+T \Rightarrow dr = ds$

$$\parallel$$

$$\int_{a_1+T}^{T} h(\overset{r-T}{r})\,dr + \int_0^{b_1} h(s)\,ds =$$

NOTO CHE $a_1 + T = b_1$ perché $b_1 - a_1 = b - a = T$

$$\int_{b_1}^{T} h(r)\,dr + \int_0^{b_1} h(s)\,ds = \int_0^T h(s)\,ds$$

TORNIAMO ALL'ONDA QUADRA - Per calcolarne i coeff di Fourier integro tra $-\pi$ e π

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt + \int_{0}^{\pi}(1)\,dt\right] = 0$$

Se $n \neq 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt$$

Sostituisco $t = -s \qquad dt = -ds$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\cos(-ns)(-1)\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt =$$

$-$ $\qquad$ $-$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(ns)\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nt)\,dt = 0$$

HO FATTO UN CALCOLO CHE USA SOLO IL FATTO CHE
$f(-t) = -f(t)$ "f è dispari" – IN QUESTO MODO

SI VEDE CHE

$$f \text{ DISPARI} \implies a_n = 0 \quad \forall n$$

Vediamo i b_n. $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin(nt)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

– sostituisco $s = -t$ nel I°

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-s)}_{-f(s)}\,\underbrace{\sin(-ns)}_{-\sin(ns)}\,(-ds) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt =$$

4 segni meno $\rightarrow$ $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(s)\sin(ns)\,ds + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(\ldots$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi} \sin(nt) = \quad (n = 2k+1)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)}$$

ci sono solo "armoniche dispari"

SUONA MALE

NOTA $\quad a_n = 0 \qquad b_n \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ \simeq \frac{\text{cost}}{n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

e dunque $\sum |b_n|$ diverge $\Rightarrow$ VA D'ACCORDO CON QUANTO VISTO IERI (se $\sum |b_n| < +\infty \Rightarrow f$ CONTINUA)

$\rightsquigarrow$ Poca regolarità di f $\longmapsto$ poca sommabilità dei coeff.

La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}$ CONVERGE "per merito"

dei $\sin((2k+1)t)$ che oscillano.

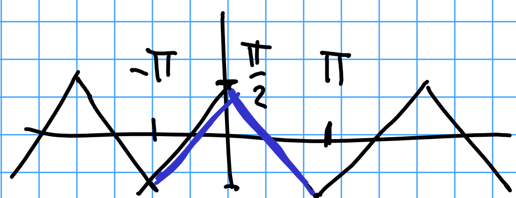
METTIAMO $t = \pi/2$. Allora (per i teoremi fatti)

$$1 = f(\pi/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\left(\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

ALTRO ESEMPIO



$$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t| \quad \text{se} \quad |t| \leq \pi$$ (e periodicizzata con periodo 2π)

$$= \frac{\pi}{2} - t \quad \text{se } t \in [0, \pi]$$

$$= \frac{\pi}{2} + t \quad \text{se } t \in [-\pi, 0]$$

NOTO CHE $f(-t) = f(t)$

Dunque $b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt =$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t) \sin(nt)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$$

pongo $s = -t \quad ds = -dt$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(-s) \sin(-ns)(-ds) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$$

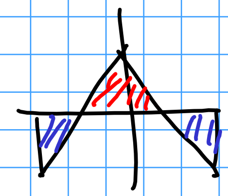
TRE SEGNI $-$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(s) \sin(ns)\, ds + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = 0$$

OGNI FUNZIONE PARI HA $b_n = 0 \quad \forall n$

Passiamo agli a_n

$a_0 = 0$ (l'integrale di $f = 0$)



$n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \overset{\text{(come prima)}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

FATTO GENERALE. Se h è PARI $\Rightarrow \int_{-M}^{M} h(t)\,dt = 2\int_0^M h(t)\,dt$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(nt)\,dt$$ — INTEGRO PER PARTI

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt =$$

se $t=0$ $\sin(n\cdot 0)=0$

se $t=\pi$ $\sin(n\pi)=0$

$=0$

$$\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)t)$$

Stavolta $\quad a_n \simeq \frac{\text{cost}}{n^2}$ (n DISPARI) $\quad$ quindi $\sum |a_n| < +\infty$

IN EFFETTI f è continua

f PIÙ REGOLARE $\Rightarrow$ $\sum |a_n|$ PIÙ SOMMABILI

METTIAMO $t=0$

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Facciamo un ultimo calcolo tornando all'onda quadra di prima

$$q(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t)$$

Usiamo la formula dell'energia

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} q^2(t)\,dt = \cancel{T a_0^2} + \frac{T}{2}\sum\left(\cancel{a_n^2} + b_n^2\right) = \pi \sum b_n^2$$

$$= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^2}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{8}$$

(ho ritrovato quanto già visto prima)