Analisi Matematica 1
Trentacinquesima lezione

Serie a termini di segno variabile

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://saccon.blog.dma.unipi.it**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 9.00 alle 12.00**

16 aprile 2010

Serie con termini a segno variabile.

Anche per le serie vale

Teorema Se a_n è una successione tale che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ è convergente}$$

Allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente.

Dim. Posso scrivere

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 \le a_n^+ \le |a_n| \\ 0 \le a^- \le |a_n| \end{array}}$$

Se so che $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, ricavo (usando il confronto)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ sono entrambe convergenti.

da cui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ risulta convergente #

Terminologia: se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ dirò che $\sum a_n$ è

ASSOLUTAMENTE converge

Dunque (per il teorema di prima)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONV. ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

[La convergenza assoluta è una proprietà più forte della convergenza]

ESEMPI $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \dots + \dots$

NON POSSO USARE IL CONFRONTO ASINTOTICO PERCHÉ LA SERIE NON È A TERMINI . Posso vedere se la serie è assolutamente convergente, cioè se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right|$$ è conv. Tale serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ cioè la serie armonica con $\alpha = 2 > 1$

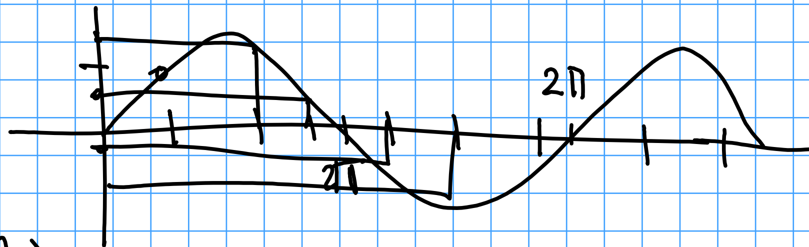
CONVERGENTE $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(Teorema di prima)

Esempio (simile ma un po' più complicato)

$$a_n = \frac{\sin(n)}{1+n^2-n}$$

cambio segno in maniera non prevedibile



Per vedere se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ricorro (di nuovo) alla conv. assoluta; cioè posso a studiare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{1-n+n^2} \right|$$ posso dire di

$$\left| \frac{\sin(n)}{1-n+n^2} \right| \leq \frac{1}{|1-n+n^2|} = \frac{1}{1-n+n^2}$$

$\circledast$

(almeno per n grande dato che $1-n+n^2 \to +\infty$)

e $$\frac{1}{1-n+n^2} \simeq \frac{1}{n^2}$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n+n^2}$ conv. per il confronto asintotico tra serie a termini ≥ 0

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ conv.}$$ (criterio del confronto, vedi $\ast$)

cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è ASS. CONV. $\Rightarrow$ è convergente

Se avessi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ NON SAPREI COSA FARE

Se provo come primo trovo $\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

NON CI FACCIO NIENTE

corrisponde a una serie divergente

INVECE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ LA POSSO STUDIARE

A CAUSA DELLA REGOLARITÀ DEI SEGNI DI $(-1)^n$

Def. Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n \geq 0$

si dice "serie a segni alterni": se $a_n = (-1)^n b_n$

$$a_n \begin{cases} \geq 0 & n \text{ pari} \\ \leq 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Teorema (Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni)

Se b_n è decrescente e tende a zero ($\Rightarrow b_n \geq 0$)

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge

ESEMPIO La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, dato che

$b_n = \frac{1}{n}$ è decrescente, infinitesimo. Dunque posso applicare il criterio di Leibniz.

NOTA Se passo ai moduli trovo la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge. Dunque

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ È CONVERGENTE (per Leibniz) ma

NON È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

$\Rightarrow \sum_{n \text{ PARI}} \frac{1}{n}$ DIVERGE e $\sum_{n \text{ DISPARI}} \frac{1}{n}$ DIVERGE, ma "messe insieme" producono un risultato finito.

ESEMPIO

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

- $\sum b_n$ converge per Leibniz. Per vederlo basta notare che $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e $\frac{1}{\sqrt{n}}$ decresce ($\Leftarrow \sqrt{n}$ cresce)

- $a_n \simeq b_n$. Infatti

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n/\sqrt{n} + 1/n}{(-1)^n/\sqrt{n}} = 1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 1$$

(limitato · infinitesimo)

$$\left(\frac{1}{n} \Big/ (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{(-1)^n} \frac{1}{n} \sqrt{n} = \left(\frac{1}{-1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGE Infatti $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k}_{\substack{\downarrow \text{ CONV.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

MORALE: Se a_n, b_n non sono ≥ 0 il confronto asintotico non funziona

---

Dimostriamo il criterio di Leibniz

$b_n \to 0$, b_n decresce $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ conv.

Devo dimostrare che la successione delle somme parziali

$$S_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots + (-1)^n b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$$

ammette limite finito per $n \to +\infty$.

Per questo considero separatamente

$$S_{2n} = b_0 - b_1 + b_2 - \dots + b_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k$$

$$S_{2n+1} = b_0 - b_1 + b_2 - \dots - b_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k b_k$$

Prendiamo S_{2n}. Dico $\{S_{2n}\}$ decresce:

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = -b_{2n+1} + b_{2n+2} \leq 0$$

$\{b_n\}$ DECRESCE $\Rightarrow b_{2n+1} \geq b_{2n+2}$

$\Rightarrow \{S_{2n}\}$ DECRESCE

Prendiamo S_{2n+1}. Dico che $\{S_{2n+1}\}$ CRESCE:

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = b_{2n+2} - b_{2n+3} \geq 0$$

$\Rightarrow \{S_{2n+1}\}$ CRESCE.

Confrontiamole tra loro

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -b_{2n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad S_{2n+1} = S_{2n} - b_{2n+1} \leq S_{2n}$$

Quindi

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \leq S_0$$

(tutto si svolge tra S_0 e S_1) Per le proprietà delle successioni monotone esistono S' e S'' tali che

$S_{2n} \to S''$, $S_{2n+1} \to S'$ con

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S' \leq S'' \leq S_{2n} \leq S_0$$

Ricordo però che $S_{2n+1} = S_{2n} - b_{2n+1}$

$$\begin{array}{ccccc} S_{2n+1} & = & S_{2n} & - & b_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S' & & S'' & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $S' = S''$ la chiamo S

DUNQUE $S_{2n} \to S$, $S_{2n+1} \to S$ e

$$\left(S_1 \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_0 \quad \circledast \right)$$

$\Rightarrow$ $S_n \to S$ e $S = \sum (-1)^n b_n$

<u>Nota</u> La $\circledast$ mi permette di valutare (MALE..) la serie:

k dispari $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}(-1)^n b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \leq \sum_{n=0}^{k}(-1)^n b_n$ se k pari

---

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+\sin(x)}{\underbrace{x^{\alpha}(1+x^5+\ln(1+x))}_{f(x)}}\,dx$$

per quali α l'integrale improprio converge??

VICINO A ZERO

$$f(x) = \frac{2x+x+o(x)}{x^{\alpha}(1+o(1))} = \frac{3x(1+o(1))}{x^{\alpha}(1+o(1))}$$

DUNQUE $\quad f(x) \simeq \dfrac{3}{x^{\alpha-1}}$

$\dfrac{3}{x^{\alpha-1}}$ è sommabile(*) vicino a zero $\iff \alpha-1<1 \iff \underline{\underline{\alpha<2}}$

Lo stesso vale per $f(x)$

(*) Decidiamo di chiamare sommabile un integrale convergente - VEDI ANCHE LA LEZIONE 33

ALL' INFINITO

$$f(x) = \frac{2x\left(1+\sin(x)/x\right)}{x^\alpha x^5\left(1/x^5+1+\ln(1+x)/x^5\right)} = \frac{2x}{x^{\alpha+5}}\left(1+o(1)\right) \simeq \frac{2}{x^{\alpha+4}}$$

La funzione $\frac{2}{x^{\alpha+4}}$ è sommabile (*) a ∞ $\iff$ $\alpha+4>1$

$\iff$ $\alpha>-3$

Lo stesso vale per $f(x)$. IN DEFINITIVA

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ CONV.} \iff -3<\alpha<2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x^\alpha(1+x^4)} \qquad \left(\sqrt{1+y} = 1+\frac{y}{2}+o(y)\right)$$

VICINO A ZERO

$$f(x) = \frac{\cancel{1}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}(x^2-x)+o(x^2-x)\right)}{x^\alpha(1+o(1))} =$$

NOTO CHE $x^2 = o(x)$; $o(x^2 - x) = o(-x + o(x)) = o(-x)$
$= o(x)$

$$= \frac{\frac{1}{2}x + o(x)}{x^{\alpha}(1 + o(1))} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\alpha-1}}(1 + o(1)) \simeq \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

SOMMABILE $(\times)$ $\Longleftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$

A $+\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x^{\alpha}(1+x^4)} =$$

$$\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)}{x^{\alpha+4}(1+o(1))} =$$

$$\frac{x}{x^{\alpha+4}}\frac{1}{(1+o(1))}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + o\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)\right) =$$

$$\frac{x}{x^{\alpha+4}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\Big/(1+o(1)) = \frac{x}{x^{\alpha+4}}\frac{1}{2}\frac{1}{x}\left(1+o(1)\right) =$$

$$\frac{1}{2x^{\alpha+4}}\left(1+o(1)\right) \simeq \frac{1}{2x^{\alpha+4}}$$

SOMMABILE $(*)$ $\Longleftrightarrow$ $\alpha+4>1 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha>-3}$

$$\mathbb{R} \Longrightarrow -3<\alpha<2$$

Fore :
$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{|x^2-1|}}{x^\alpha(1+x^4)}$$

ATTENZIONE :
VALORE ASSOLUTO
NELLA SECONDA RADICE

Serie a segno variabile

Sia $(a_n)_n$ una successione e supponiamo di non avere nessuna informazione sul segno dei suoi termini.
Per studiare la serie degli a_n abbiamo a disposizione due strumenti:

Teorema (Criterio della convergenza assoluta)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$, *allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

Teorema (Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni)

Supponiamo che $a_n = (-1)^n a'_n$ *dove* $a'_n \geq 0$ (*serie a segni alterni*).
Se $(a'_n)_n$ *è decrescente e infinitesima, cioè se*

$$a'_{n+1} \leq a'_n \quad \forall n, \qquad \lim_{n\to\infty} a'_n = 0$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a'_n$ *è convergente.*

Convergenza assoluta

Il primo dei criteri precedenti suggerisce la seguente definizione.

Definizione

Data una successione $(a_n)_n$ diciamo che la serie degli a_n è *assolutamente convergente* se la serie dei moduli di a_n converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge}$$

con questa terminologia il criterio diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge assolutamente} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

DIM.

Il viceversa NON è vero.
La convergenza assoluta è una proprietà PIÙ FORTE della convergenza (lo vediamo dopo).

Criterio di Leibniz

Teorema

Se $(a_n)_n$ è decrescente e infinitesima, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

DIM. ESEMPI

Osservazione

- la proprietà che $(a_n)_n$ sia decrescente **non si può togliere**;
- la proprietà che la serie sia a segni alterni **non si può togliere**;
- le ipotesi del criterio di Leibniz implicano la convergenza della serie **ma non ne implicano** la convergenza assoluta.

  Per esempio la serie armonica a segni alterni: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ converge per Leibniz, ma non converge assolutamente dato che $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = +\infty$.

  Questo esempio mostra anche che **la convergenza non implica la convergenza assoluta**.