Analisi Matematica 1
Ventiduesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

18 dicembre 2009

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2}\cos(2x)-1}{\sin(x^2)\sin^2(x)} = ?$$

Usiamo Taylor - 1° tentativo sviluppando al II° ordine.

- $e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + o(x^2)$

- $\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$

- $\sin(x^2)\sin^2(x) = (x^2+o(x^2))(x+o(x))^2 =$

$(x^2+o(x^2))\, x^2(1+o(1))^2 = x^4(1+o(1))(1+o(1))^2 =$

$x^4(1+o(1)) = x^4 + o(x^4)$

RAPPORTO $= \dfrac{(1+2x^2+o(x^2))(1-2x^2+o(x^2))-1}{x^4+o(x^4)} =$

$$\frac{\cancel{1} \cancel{-2x^2} + o(x^2) + \cancel{2x^2} + o(x^2) + o(x^2) - \cancel{1}}{x^4 + o(x^4)} = \frac{o(x^2)}{x^4 + o(x^4)}$$

NON POSSO DIRE A COSA TENDE $\dfrac{o(x^2)}{x^4}$

ALLORA AGGIUNGO UN'ALTRO TERMINE AGLI SVILUPPI (DEL NUMERATORE)

- $e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o(x^4) =$
  $1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$

- $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) =$
  $1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

DUNQUE IL NUMERATORE SI PUÒ SCRIVERE

$$\left(1+2x^2+2x^4+o(x^4)\right)\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)-1=$$

$$\cancel{1}\cancel{-2x^2}+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\cancel{+2x^2}-4x^4+o(x^4)+2x^4+o(x^4)$$

$$+o(x^4)-\cancel{1}=\left(\frac{2}{3}-4+2\right)x^4+o(x^4)=$$

$$-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\text{RAPPORTO}=\frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\longrightarrow -\frac{4}{3}$$

<u>NOTA</u> Con i calcoli sopra abbiamo dovuto, se chiamo

$$f(x)=e^{2x^2}\cos(2x)$$

$$f(x)=-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\iff f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)$$

$= 0$ (essendo $f(x) = o(x^3)$) e $\frac{f^{(IV)}(0)}{4!} = -\frac{4}{3}$

$\Updownarrow$

$f^{(IV)}(0) = -\frac{96}{3} = -32$

IN SOSTANZA LE DERIVATE IN ZERO DI $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ SI POSSONO RICOSTRUIRE DALLE DERIVATE IN ZERO DI $f_1(x)$ e f_2...

<u>ESEMPIO</u> Voglio trovare lo sviluppo di Taylor, in $x=0$ di $f(x) = tg(x)$ fino all'ordine 7.

<u>OSS.</u> è chiaro che, se $x_0 = 0$

f PARI $\Rightarrow$ P_n HA SOLO POTENZE PARI

f DISPARI $\Rightarrow$ P_n HA SOLO POTENZE DISPARI

Questo si può vedere notando che:

- f PARI $\Rightarrow$ f' DISPARI
  f DISPARI $\Rightarrow$ f' PARI

- f DISPARI $f(0)=0$

PARI: $f(x) = f(-x)$

DISPARI: $f(-x) = -f(x)$

Mi devo aspettare solo potenze dispari.

HO DUE POSSIBILITÀ

(1) Trovare le derivate $f^{(k)}(x)$, $k = 0, \dots, 7$

e calcolarle in zero

(2) Cercare di usare gli sviluppi di $\sin(x) / \cos(x)$

dato che $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\sin(x) = x + o(x^2)$
$\cos(x) = 1 + o(x)$

PASSO 1

$$f(x) = \frac{x + o(x^2)}{1 + o(x)} = = \frac{x(1 + o(x))}{(1 + o(x))} =$$

$$x(1 + o(x))(1 + o(x))^{-1} = x(1 + o(x))(1 - o(x))$$

$$\left[(1+y)^{-1} = 1 - y + o(y) \right] \qquad = x(1 + o(x)) = \underline{\underline{x + o(x^2)}}$$

DUNQUE $tg(x) = x + o(x^2)$

PASSO 2 $f(x) - x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - x =$

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} - x = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{1+o(x)} = \left(\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{3}x^3+o(x^4)$$

DUNQUE $\quad tg(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$

<u>PASSO 3</u> $\quad tg(x) - x - \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} - x + x^3/3 =$

$$\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} - x - \frac{x^3}{3} =$$

(tengo solo le potenze ≤ 5)

$$\frac{\cancel{x}-\cancel{\frac{x^3}{6}}+\frac{x^5}{120} \;\Big|\; -\cancel{x}-\cancel{\frac{x^3}{3}}+\cancel{\frac{x^3}{2}}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^5}{24}+o(x^6)}{1+o(x)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)x^5+o(x^6)}{1+o(x)} = \frac{2}{15}x^5+o(x^6)$$

$$\Rightarrow \quad tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

TRALASCIAMO $\quad x^7$

ESEMPIO $(1+x)^{\alpha}$ $\left(= 1+\alpha x + o(x) \right)$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$, devo calcolarmi $f^{(k)}(0)$, $k \dots$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \to f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \to f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}_{k \text{ FATTORI}} (1+x)^{\alpha-k}$$

$$\to \boxed{f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \right) x^k$$

POSSO CHIAMARE $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ $\left(\binom{\alpha}{0}=1\right)$

Questo va d'accordo con il fatto che se $\alpha = m \in \mathbb{N}$

VIENE $\dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$ (il vecchio binomiale) se $k \leq m$

$= 0$ se $k > m$ (perché se $k > m$ al

numeratore compare $m-m = 0$)

Se $\alpha \notin \mathbb{N}$ $\binom{\alpha}{k}$ è diverso da zero $\forall k \geq 0$

CON QUESTA POSIZIONE

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^{k} + o(x^{n})}$$

(se $\alpha = m$ INTERO allora quando $n > m$ $o(x^{n}) = 0$

e l'eguaglianza diventa lo sviluppo del binomio di Newton

Per esempio consideriamo $\underline{\alpha = -1}$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{k!}{k!} = (-1)^k$$

Quindi $$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(-1)^k (-x)^k}_{} + o(x^n)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)}$$

IN REALTÀ L'ULTIMA FORMULA SI PUÒ SCRIVERE IN MANIERA PIÙ PRECISE CON TUTT'ALTRO METODO:

SAPPIAMO CHE

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) \iff$$

$$\sum_{k=0}^{m} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

questo è $o(x^n)$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{m} x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

(DA RICORDARE)

<u>Altro caso</u> $\alpha = \frac{1}{2}$ $\left(\sqrt{1+x} = \dots\right)$. Ci serve

calcolare $\binom{1/2}{k} = \frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)\dots(1/2-k+1)}{k!} =$

$\frac{1}{2^k k!}\left(1\,(1-2)(1-4)(1-6)\dots(1-2k+2)\right) =$

$$\frac{1}{2^k k!}\underbrace{(-1)(-3)(-5)\cdots(-2k+3)}_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdots 2k-3$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}(2k-3)!!$$

DOVE

$m!!$ = prodotto di tutti gli interi $\leq m$ con la stessa parità

$$5!! = 1\cdot 3\ 5 \qquad 6!! = 2\cdot 4\cdot 6$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n)$$

mettiamo $n = 3$ VIENE

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$k = 2 \to \frac{(-1)(4-3)!!}{4\cdot 2!}$$

$$k = 3 \to \frac{(-1)^2(6-3)!!}{8\cdot 6}$$

$$= +\frac{3}{8\cdot 6} = \frac{1}{\ }$$

Formula di Taylor "con resto di Lagrange" –
valutazione del resto secondo Lagrange

Abbiamo visto che se f ha n derivate

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{dove } R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

($P_n(x)$ = pol. di Taylor). Voglio un'informazione "più precisa" su R_n. Lo posso fare se ho anche la derivata $n+1$

<u>Teorema</u> Se f ha $n+1$ derivate vicino a x_0 $\Rightarrow \exists\, \xi$ t.c.

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

e ξ compreso tra x_0 e x "RESTO DI LAGRANGE"

NOTA: SE $n=0$ il teorema dice

$$f(x) = P_0(x) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-x_0) \iff$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \iff$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$$ RITROVO IL T. DI LAGRANGE

DIM. Chiamo $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

CONSIDERO $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

$$\left(\begin{array}{l} R_n(x_0) = f(x_0) - P(x_0) = 0 \\ g(x_0) = (x_0-x_0)^{n+1} = 0 \end{array}\right)$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$ per ξ_1 tra x_0 e x_1 (teorema di Cauchy)

$$= \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} =$$

perché $R_n'(x_0) = f'(x_0) - P_n'(x_0) \overset{\shortparallel}{0}$

$g'(x) = (n+1)(x-x_0)^n \big|_{x=0} = 0$

$$= \frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)} =$$ con ξ_2 compreso tra x_0 e ξ_1 (DI NUOVO CAUCHY)

$\vdots$ ITERO $n+1$ VOLTE

$$\frac{R^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$ dove $x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \dots < x$

(se $x < x_0$ si gira tutto)

MA $$g^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-x_0)^{n+1} = (n+1)!$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \underbrace{P_n^{(n+1)}(x)}_{=0} = f^{(n+1)}$$

perché P_n ha grado n

DUNQUE ALLA FINE $\dfrac{R_n(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

dove $\xi = \xi_{n+1}$ è compreso tra x_0 e x $\Longleftrightarrow$

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Longleftrightarrow$$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

VEDIAMO A COSA PUÒ SERVIRE QUESTA FORMULA

PRENDIAMO $f(x) = e^x \longrightarrow f^{(k)}(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^{\xi(x,n)}}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\text{resto } n\text{-esimo}}$$

dove $\xi(x,n)$ (dipende da x e da n) è compreso tra 0 e x

ORA POSSO FISSARE x e FAR TENDERE n A $+\infty$. COSA SUCCEDE DEL RESTO

(MI PIACEREBBE CHE TENDESSE A ~~ZERO~~), INEFFETTI

$$\left| \frac{e^{\xi(x,n)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{e^{|x|} x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

il fattoriale vince su x^n (se poi $|x|<1$ È ANCORA MEGLIO)

DUNQUE $e^x - \left(1 + x + \dots \frac{x^n}{n}\right) \longrightarrow 0$ se $n \to \infty$

Per es. $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$

Posso inoltre valutare l'errore

$$\left| e - \left(1 + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right| \le \frac{e \, 1^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{3}{(n+1)!}$$

Se voglio calcolare e (a meno di 3 cifre decimali) – a meno di $\frac{1}{1000}$ devo scegliere n in modo che

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \iff 3000 < (n+1)!$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \underline{7} \\ 1, & 2, & 6, & 24, & 120, & 720, & 5040 \end{array} \quad \left(\text{errore} < \frac{3}{5040} \right.$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \dots$$

$$\boxed{\text{BUONE VACANZE}}$$

Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange)

Siano I un intervallo , $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione che ammetta derivata fino all'ordine $n+1$ in I.
Allora per ogni x in I esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Detto altrimenti esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

DIM

Anche in questo caso sarebbe meglio dire

“**valutazione secondo Lagrange del resto di Taylor**”

Osservazione

Se $n = 0$ il teorema sopra restituisce il Teorema di Lagrange.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+2})$$

Tutti questi sviluppi sono per $\boxed{x \to 0}$. Al posto di $O(x^{n+1})$ si può mettere $o(x^n)$ (è un po' meno ma di solito è sufficiente). Il binomiale di α in $\mathbb{R}$ è definito da

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$