Analisi Matematica 1
Ventunesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

17 dicembre 2009

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)\sin^2(x)} = \otimes$$

Si tratta di una forma del tipo $\frac{0}{0}$. Usiamo de l'Hô..

(anche se poi - forse - si farà meglio con Taylor)

$$\otimes = \lim_{x\to 0} \frac{2x\, e^{x^2}\cos(2x) - 2e^{x^2}\sin(2x)}{\cos(x^2)\cdot 2x\cdot \sin^2(x) + \sin(x^2)\,\cancel{2}\sin(x)\cos(x)}$$

$$2\lim_{x\to 0} e^{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(2x) - \sin(2x)}{2x\cos(x^2)\sin^2(x) + \sin(x^2)\sin(2x)} = \left\{\begin{matrix}\text{altro}\\ \text{Hôp.}\end{matrix}\right.$$

$$2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 2x\sin(2x) - 2\cos(2x)}{2\cos(x^2)\sin^2(x) - (2x)^2\sin(x^2)\sin^2(x) + 2x\cos(x^2)2\sin(x)\cos(x) + 2x\cos(x^2)\sin(2x) + 2\sin(x^2)\cos(2x)}$$

$$2. \quad \frac{-1}{0} = -\infty$$

Alcune considerazioni a prop. di de l'Hôpital.

- Può succedere che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ esista senza che esista $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Per esempio

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad g(x) = x$$

Se facciamo $\frac{f(x)}{g(x)} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$ dato che $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata

Però se calcolo $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) \Rightarrow$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{NON HA LIMITE}$$

$2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$

$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ NON HA LIMITE IN $x \to 0$

$g'(x) = 1$ DUNQUE $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ NON HA LIMITE SE $x \to 0$

Dal teorema dell'Hôpital segue questo fatto:

FATTO Data f definita vicino a un punto x_0; suppongo f derivabile nelle $x \neq x_0$. Suppongo f CONTINUA anche in x_0. Suppongo che esista $\ell = \lim_{x \to x_0} f'(x)$

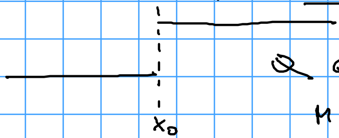
Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$

Dim. $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{(\text{Hôp})}{=} \lim \frac{f'(x)}{1} = \ell$

(Posso applicare Hôp. perché ho $\frac{0}{0}$ - il num. si annulla se f è continua in x_0

(se esiste il limite delle derivate, questo mi dà la derivata

SERVE che f sia continua altrimenti ho un controesempio



QUI $f'(x) \to 0$ se $x \to x_0$

MA f NON è DER in x_0

Per esempio consideriamo

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{per } x \neq 0 \qquad f(0) = 1$$

Mi chiedo se f è derivabile in $x=0$. Posso fare in due modi.

(1) Applico la definizione di derivata:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \frac{\sin(x)-x}{x^2} \underset{(H\hat{o}p)}{=}$$

$$\frac{\cos(x)-1}{2x} = \frac{\cos(x)-1}{x^2}\; 2x \to \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0 = 0$$

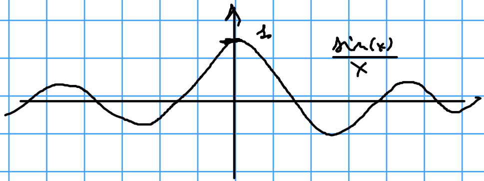
$\xrightarrow{\text{altro Hôp}} \quad -\frac{\sin(x)}{2} \to 0$

(2) Dato che f è continua in zero posso fare il limite di $f'(x)$ per $x\to 0$; cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2} \underset{(H\hat{o}p)}{=} \lim \frac{-\sin(x)\cdot \cancel{x} + \cancel{\cos(x)} - \cancel{\cos(x)}}{2\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(x)}{2} = 0$$

Abbiamo scoperto che $\frac{\sin(x)}{x}$ è derivabile in zero e ha derivata nulla in $x=0$



TAYLOR Considero $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) $x_0 \in I$; $n \in \mathbb{N}$. Suppongo che f sia derivabile n volte in I.

PROBLEMA Posso approssimare f mediante un polinomio di grado ($\leq$) n a meno di $o((x-x_0)^n)$?

CIOE'. Posso trovare un polinomio $P(x)$

tale che

$$f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

<u>SE $n=1$</u> sappiamo la risposta : $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

è la retta Tangente - ed è l'unica retta che va bene

COSA SUCCEDE SE $n > 1$? Cominciamo con un enunciato preliminare

Prop. Se $k \leq n$; se $f(x_0) = f'(x_0) = \; = f^{(k-1)}(x_0)$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$=$

(Nota che k può essere 0)

Dim. Basta applicare de l'Hôpital.

Noto che $f(x_0) = 0$, $(x_0 - x_0)^k = 0$ ho una forma $\frac{0}{0}$; dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{k(x-x_0)^{k-1}}$$

Dato che anche $f'(x_0) = 0$ e $(x_0 - x_0)^{k-1} = 0$, riapplico Hôpital e trovo $\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{k(k-1)(x-x_0)^{k-2}}$.

Itero K volte, fino a quando il denominatore non tende più a zero: Trovo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(K)}(x)}{K!} = \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}$$

<u>Conseguenza</u> $\boxed{f = o\left((x-x_0)^n\right) \iff f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0}$

<u>Dim.</u> $\Leftarrow$ Conseguenza del discorso sopra con $K = n$

$\Rightarrow$ Ragiono per assurdo. Suppongo che $\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$

ma che ci sia una derivata, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, $k \leq n$

Posso supporre che quelle precedenti siano nulle

$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$. Per il "FATTO" so di $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \ell \neq 0 \Longrightarrow$

$$\ell \neq 0 \leftarrow \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = \boxed{\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}} \cdot (x-x_0)^{n-k} \longrightarrow 0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } k=n \\ 0 & k<n \end{cases} = 0$$

ASSURDO

TORNIAMO AL PROBLEMA DI TROVARE $P(x)$ tale che

$$f(x) - P(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

$\Updownarrow$ (per quanto visto ora)

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(f(x) - P(x)\right)(x_0) = 0 \quad \text{se } k = 0, 1, \dots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{se } k = 0, 1, \dots, n$$

Quindi $\boxed{f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n) \iff P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k=0..n}$

Prop. Esiste uno e un solo polinomio $\exists!$ P di grado $\leq n$ avente in x_0 le stesse derivate di f.

Tale polinomio è dato da

$$P(x) = P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

P_n viene detto polinomio di Taylor di ordine n, in $x=x_0$, per f.

Dim. Prendiamo un generico polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k .$$

Calcoliamo $P^{(j)}(x)$ per $j=0,1,\dots,n$

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, k \, (x-x_0)^{k-1}$$

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k \, k(k-1)(x-x_0)^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$P^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} a_k \, \overbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-j+1)}^{j \text{ termini}} (x-x_0)^{k-j}$$

$$P^{(n)}(x) = a_n \, n!$$

Calcoliamo tali derivate in $x = x_0$.

$$P(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \Big|_{x=x_0} \overset{\text{rimane solo l'addendo } k=0}{=} a_0$$

$$P'(x_0) = \sum_{k=1}^{m} a_k\, k(x-x_0)^{k-1}\Big|_{x=x_0} = a_1 \cdot 1$$

rimane solo $k=1$

$$P''(x_0) = \sum_{k=2}^{m} a_k\, k\,(k-1)(x-x_0)^{k-2}\Big|_{x=x_0} = a_2 \cdot 2 \cdot 1$$

rimane solo $k=2$

$$P^{(j)}(x_0) = \sum_{j=k}^{m} a_k\, k(k-1)\cdots(k-j+1)(x-x_0)^{k-j}\Big|_{x=0} = a_j \cdot j!$$

DUNQUE SE VOGLIO

$$P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) \iff \boxed{a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}}$$

<u>Teorema</u> (Formula di Taylor con resto di Peano)

- Se P_n è il polinomio di Taylor allora

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

· Se viceversa $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$, grado $P \le n \Rightarrow$

$P(x) = P_n(x)$.

P_n è l'unico polinomio di grado $\le n$ che approssima

$f(x)$ a meno di infinitesimi di ordine sup. a $(x-x_0)^n$

<u>Esempio</u> $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$

Chi è $P_n(x)$ in questo caso?

$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$

$$P_n(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

e quindi $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$

NOTA La differenza $f(x) - P_n(x)$ $(= R_n(x))$ si chiama

"resto di Taylor" di ordine n

ABBIAMO TROVATO CHE $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$

= VALUTAZIONE DEL RESTO SECONDO PEANO"

Altri esempi (IMPORTANTI) $x_0 = 0$

$f(x) = \cos(x)$. $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x) \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x) \quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin(x) \quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = f(x) \quad \vdots$

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k = 2n+1 \\ (-1)^n & k = 2n \end{cases}$$

$$\cos(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{P_{2n}(x)} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Nello modo se $f(x) = \sin(x)$ ho

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad \dots \Rightarrow$$

$$\sin(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{P_{2n+1}} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

IN REALTÀ POSSO DIRE UN PO' DI PIÙ

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cancel{0\, x^{2n+2}}}_{P_{2n+2}(x)} + o(x^{2n+2})$$

e

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cancel{0 \cdot x^{2n+1}} + o(x^{2n+1})$$

POTREI ANCHE SCRIVERE

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} + o(-)$$

$$\sin(x) = x + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

Esempio di limite fatto con Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos(2x) - 1}{\sin^2(x)\,\sin(x^2)} = ?$$

Scommetto sul fatto che bastano gli sviluppi al $\underline{\underline{IV}}$° ordine.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) =$$

$$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x^2}\cos(2x) = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) =$$

due termini ... 3 termini

$$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) + x^2 - 2x^4 + o(x^4) + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + o(x^4)$$

$4 - 12 + 3$

$$1 - x^2 + \left(\frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4) = 1 - x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

DUNQUE IL NUMERATORE È $-x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4) = -x^2+o(x^2)$

DENOMINATORE $= \sin(x^2)\sin^2(x) = (x^2+o(x^2))(x+o(x))^2 =$

$(x^2+o(x^2))\,x^2(1+o(1))^2 = (x^4+o(x^4))(1+o(1)) = x^4+o(x^4)$

LIMITE $\sim \dfrac{-x^2+o(x^2)}{x^4+o(x^4)} \quad -\dfrac{1}{x^2}\,\dfrac{1+o(1)}{1+o(1)} \to -\infty$

<u>Esercizio</u> provare a calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2}\cos(2x)-1}{\sin(x^2)\sin^2(x)}$

Commenti sui teoremi di de l'Hôpital

- Può esistere il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ senza che esista $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Per esempio (per $x \to 0$)

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad g(x) = x$$

- Dal teorema di de l'Hôpital si ottiene il seguente enunciato:
  Se f è definita e **continua** vicino a un punto x_0, è derivabile nei punti $x \neq x_0$ ed esiste finito il limite

$$l = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

  allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = l$. Per vederlo basta applicare de l'Hôpital al rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Il teorema di de l'Hôpital **non va usato a macchinetta**. Vedi ad esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2}\cos(2x)-1}{\sin(x)}$$

Definizione (Polinomio di Taylor)

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo , sia $x_0 \in I$ e sia n un numero intero. Supponiamo che f ammetta derivata fino all'ordine n vicino a x_0.
Chiamiamo **polinomio di Taylor di ordine n per f nel punto x_0** il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

che si può scrivere in forma sintetica

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Notiamo che x_0 è fissato e quindi la dipendenza di P_n da x è, per l'appunto, di tipo polinomiale.

Osservazione

Il polinomio di Taylor di ordine zero è la costante $f(x_0)$. Il polinomio di Taylor di ordine uno è la retta tangente:

$$P_0(x) = f(x_0) \qquad\qquad P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Vedremo che il polinomio di Taylor di ordine n è il polinomio di grado minore o eguale a n che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0 (in un senso da precisare). Una prima proprietà di P_n è la seguente.

Proprietà

Il polinomio P_n è l'unico polinomio P tale che

$$\mathrm{grado}(P) \leq n, \quad P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

cioè è l'unico polinomio di grado minore o eguale a n che nel punto x_0 ha le stesse derivate di f, dalla zeresima (corrispondente a f) all'ennesima.

DIM

Teorema (formula di Taylor con resto di Peano)

Siano I un intervallo , $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione che ammetta derivata fino all'ordine n vicino a x_0.
Allora

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

Viceversa se P è un polinomio di grado minore o eguale a n tale che

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

allora necessariamente $P = P_n$ (unicità del polinomio di Taylor).

DIM

Osservazione

Ricordiamo che la scrittura $f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$ significa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad \left(\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \right)$$

Se chiamiamo **resto *n*-esimo** di Taylor per f nel punto x_0 dove l'espressione

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x)$$

allora il teorema precedente equivale a dire che $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Allora un nome più corretto per il teorema precedente sarebbe:

"**valutazione secondo Peano del resto di Taylor**"

(il resto è il resto e cioè R_n - Peano dice che $R_n(x) = 0((x - x_0)^n)$).