Analisi Matematica 1
Ventesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

11 dicembre 2009

(DA CAPO)

$f(x) = x^3 - px + q \qquad p, q \in \mathbb{R}$

DOMINIO $= \mathbb{R}$; f CONTINUA SU $\mathbb{R}$

LIMITI

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

DERIVATA

$f'(x) = 3x^2 - p$

segno di f' — DIPENDE DA p

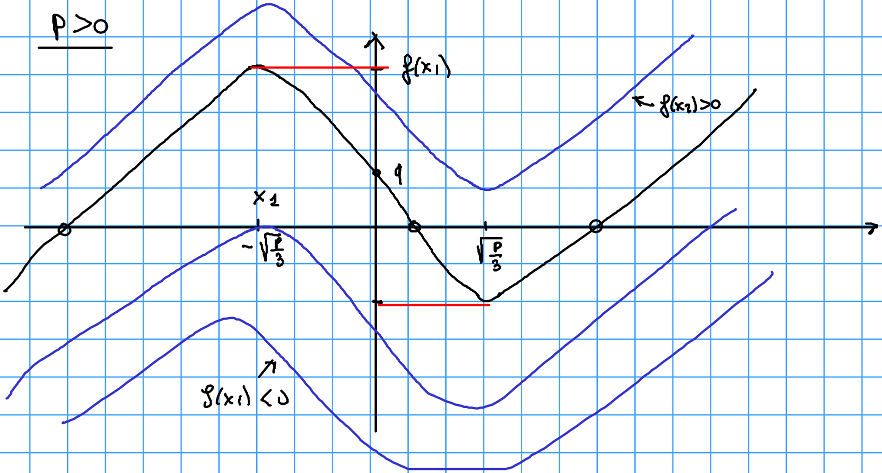
$p > 0 \qquad f'(x) = 0 \iff x = x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{p}{3}}$

$f'(x) > 0$ per $x \notin [x_1, x_2]$

$p = 0 \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0$

$p < 0 \qquad f'(x) > 0 \quad \forall x$ (non è mai nullo)

$p>0$



x_1 pto di massimo relativo -

x_2 pto di minimo relativo

$$f(x_1) = \left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 - p\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right) + q = -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} + p\sqrt{\frac{p}{3}} + q =$$

$$\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} + q$$ (valore di max rel.)

$$f(x_2) = \left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 - p\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right) + q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} - p\sqrt{\frac{p}{3}} + q =$$

$$= -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} + q$$ (valore di min. relativo)

SE $f(x_2) < 0 < f(x_1)$ TRE RADICI, cioè

$$\boxed{-\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} + q < 0 < \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} + q}$$

che significa

$$-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} < q < \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$\Updownarrow$$

$$q^2 < \frac{4}{9}p^2\,\frac{p}{3} = \frac{4p^3}{27}$$

cioè $\boxed{\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}}$ (3 radici, se $\cancel{p} > 0$)

Sempre x $p>0$ ho 1 radice x

$f(x_1) < 0$ OPPURE $f(x_2) > 0$

$q + \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}} < 0$ oppure $q - \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}} > 0$

$q < -\frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}}$ OPPURE $q > \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}}$

cioè q esterno a $\left[-\frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}}, \frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}} \right]$

$\Longleftrightarrow \quad q^2 > \left(\frac{2}{3} p \sqrt{\frac{p}{3}} \right)^2 \Longleftrightarrow$

$q^2 > \frac{4}{3} \frac{p^3}{9} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}}$ 1 radice ($p>0$)

È facile vedere che se $\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27}$ 2 radici

È anche facile studiare i casi $p=0$, $p<0$

Per esempio se $p<0 \Rightarrow$ 1 sola radice,

ma questo è contenuto in $\boxed{\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}}$ (1 radice)

Alla fine si vede che

$\frac{p^3}{27} - \frac{q^2}{4}$ è analogo del Δ per l'eq. di II° grado

$$\begin{cases} \frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27} \Longrightarrow \text{3 radici} \\ \frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27} \Longrightarrow \text{1 radice} \\ \frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$

2 radici (1 di molt. 2) se $p>0$
1 radice tripla se $p=0$

(non può essere $p<0$)

NON È SERVITO CALCOLARE LE RADICI

Lista di funzioni da studiare (1)

1. $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{x^2-3x+2}$
2. $f(x) = e^{-x^2}$
3. $f(x) = xe^{-x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x)$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$
7. $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$
8. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+1}$
9. $f(x) = x - 3\arctan(x)$
10. $f(x) = \ln^2(x) - 3\ln(x) + 2$

Lista di funzioni da studiare (2)

11. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-3x+2}$
13. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{(x+1)^2}$
14. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$
15. $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}$
17. $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
18. $f(x) = \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$
19. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}-x^2$
20. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-x}{x}$

Studio di funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

<u>DOMINIO</u> $x > 0$ (per poter definire il logaritmo

$x^2 = 0$ (denominatore $\neq 0$)

Dunque $\{x > 0\}$

<u>LIMITI</u> $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ (non è indeterminato)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0^+$ (se voglio posso usare H $\to$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

<u>SEGNO</u> (qui è chiaro)

$f(x) = 0 \iff x = 1$

$f(x) > 0 \;/ < 0 \iff x > 1 \;/\; x < 1$

DERIVATA E MONOTONIA

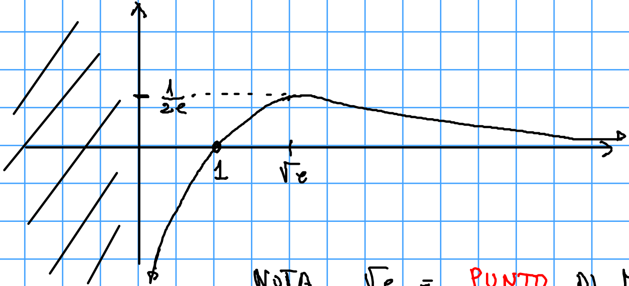
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3} \qquad (x>0)$$

IL SEGNO DI f' DIPENDE DAL SEGNO DI $1-2\ln(x)$

$$1-2\ln(x) \underset{\substack{=0\\<}}{>0} \iff 1 \underset{\substack{=\\<}}{>} 2\ln(x) \iff \ln(x) \underset{\substack{=\\>}}{<} \frac{1}{2}$$

$$\iff x < \sqrt{e} \qquad (e^x \text{ è strettamente crescente})$$

$$\left(\begin{array}{ll} 2\ln x = \ln(x^2) & \text{sol. se } x>0 \\ 2\ln|x| = \ln(x^2) & \forall x \end{array}\right)$$



$\sqrt{e}$ è pto di max

$\frac{1}{2e} = f(\sqrt{e}) = \max f$

$\left(= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e}^2} = \frac{1}{2e} \right)$

NOTA $\sqrt{e}$ = PUNTO DI MAX

$\frac{1}{2e}$ = MAX

Nota su de l'Hôpital. Non è indifferente il modo con cui si scelgono f e g e che tipo di Hôpital uso. Per es.

$\lim_{x \to 0} x \ln(x)$ <

$\frac{\ln(x)}{1/x}$ BUONA $\leadsto$ $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{x} = -x \to 0$

$\frac{x}{1/\ln(x)}$ CATTIVA $\leadsto$ $\frac{1}{\frac{-1/x}{\ln^2(x)}} = -x \ln^2(x)$ PEGGIO DI PRIMA

Altro esempi

$$(x \text{ esatta})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} \cdot \sin(x)}{tg(x)} = \lim \frac{\sin(x)}{tg(x)} =$$

dato che $\sqrt{1+\sin(x)} \to 1$ $\quad \Big| \quad = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1+tg^2(x)} = 1$

INUTILE DERIVARE ANCHE $\sqrt{1+\sin(x}$

— ANCORA MEGLIO NOTARE CHE $\frac{\sin(\cancel{x})}{tg(x)} = \cos(x)$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$$

<u>DOMINIO</u> $\quad x \neq 2 \quad (\text{den.} \neq 0)$

<u>LIMITI</u> $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

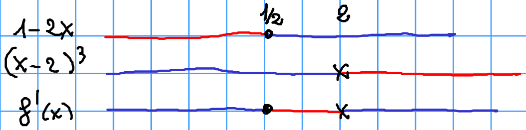
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left(\frac{3}{0^+} = \right) + \infty$$

SEGNO $\quad f(x) = 0 \iff x = \pm 1$

$f(x) < 0$ in $]-1,1[$, $f(x) > 0$ fuori $]-1,1[$ $(x \neq 1)$

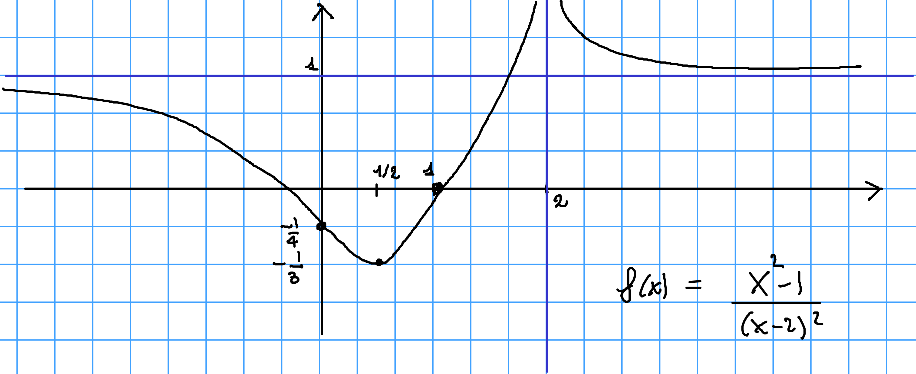
DERIVATA $\quad \dfrac{d}{dx} \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2} = \dfrac{2x(x-2)^2 - (x^2-1)\,2(x-2)}{(x-2)^4}$

$$\frac{2}{(x-2)^3}\left(x(x-2) - (x^2-1) \right) = \frac{2}{(x-2)^3}\left(x^2 - 2x - x^2 + 1\right) = \frac{2(1-2x)}{(x-2)^3}$$



$f(1/2) = -1/3$

$f(0) = -1/4$



$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$$

Lista di funzioni da studiare (3)

21. $f(x) = \arcsin(\sin(x))$
22. $f(x) = 12e^x(x^2 - 4x + 2) - x^4 + 24x \qquad (*)$
23. $f(x) = \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|^{x+1} \qquad (*)$
24. $f(x) = x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}$
25. $f(x) = \ln(x^2 - 1) - \dfrac{x-2}{x-1} \qquad (*)$
26. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)$
27. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - |x|}$
28. $f(x) = \dfrac{1 + \ln|x| - 8x}{5 + 2x^2} \qquad (*)$
29. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{x+5} - x - 20 \qquad (*)$

Teoremi di de l'Hôpital (studio di forme indeterminate)

Supponiamo che $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (finito o infinito)

Due funzioni f, g definite "vicino" a x_0

Supponiamo che $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dia luogo a una forma indet.

del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cioè supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{OPPURE} \qquad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad\qquad\qquad \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

Supponiamo f e g derivabili vicino a x_0 (NON LO

SUPPONIAMO IN x_0 — f e g NON SONO NEANCHE

DEFINITE, A PRIORI, IN x_0).

Supponiamo che $g'(x) \neq 0$ $\forall x$ (vicino a x_0)

e che esista il limite ℓ ($\in \overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

<u>TESI</u> Allora $g(x) \neq 0$ se x vicino a x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

<u>COMMENTI SULL'ENUNCIATO</u>

Serve sapere che $\frac{f'}{g'}$ <u>ha limite</u> ; sarebbe scorretto

scrivere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

senza dire altro — uno dei due potrebbe esistere e l'altro no. Hôpital afferma che — SE ESISTE IL SECONDO $\Rightarrow$ ESISTE IL PRIMO E SONO EGUALI

Si può trovare un esempio in cui ESISTE IL PRIMO MA NON IL SECONDO

È diverso scrivere l'enunciato sopra, dicendo

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \left(\text{NON SO CHE ESISTONO } f'(x_0) \text{ e } g'(x_0) \right)$$

In realtà se $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ esistono, $g'(x_0) \neq 0$ la relazione scritta sopra $\Rightarrow$ è vera (ed è più facile del teorema di de l'Hôpital). Purtroppo $\ominus$ serve a poco, perchè non si può ITERARE :

Se voglio fare $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1}$

ma se voglio fare $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

?? $\frac{f'(0)}{g'(0)}$?? ← FA ZERO

INVECE USANDO Hôpital POSSO SCRIVERE

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Dim. (del teorema nel caso 0/0 , $x_0 \in \mathbb{R}$). QUINDI

$f(x) \to 0$ se $x \to x_0$; $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ se $x \to x_0$

$g(x) \to 0$ se $x \to x_0$

(ha senso perché $g'(x) \neq 0$)

posso estendere f e g ponendole eguali a zero ($f(x_0) = g(x_0) = 0$)

IN QUESTO MODO f e g risultano continue in x_0, e quindi

f e g sono continue in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ per $\delta > 0$

(la continuità per $x \neq x_0$ segue dalla derivabilità)

Per dimostrare la tesi consideriamo una (generica)

successione di punti $\{x_n\}$ con $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$

Fissiamo uno di questi x_n, per es. $x_n > x_0$

Posso applicare il teorema di Cauchy in $[x_0, x_n]$

(f, g continue in $[x_0, x_n]$, derivabili in $]x_0, x_n[$)

$\Rightarrow$ esiste un punto $t_n \in]x_0, x_n[$ tale che

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

$$\parallel$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \quad (\text{dato che } f(x_0) = g(x_0) = 0)$$

(lo stesso se $x_n < x_0$ - trovo $t_n \in]x_n, x_0[$)

Se $n \to \infty$, $t_n \to x_0$ per il teorema del confronto $\underset{\downarrow x_0}{x_0} < t_n < \underset{\downarrow x_0}{x_n}$ (oppure $\underset{\searrow}{x_n} < t_n < \underset{\swarrow}{x_0}$)
x_0

Ne segue che $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \to \ell$ $\left(\text{dato che } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right)$

CONCLUDENDO: abbiamo dimostrato che, SE $x_n \to x_0$
$x_n \neq x_0$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \ell$$

Questo è la def. (secondo la nostra versione) di

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \qquad \#$$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO FARE MOLTI PIÙ LIMITI !!!

Esempio Abbiamo visto che (per $x \to 0$)

$$\frac{\sin(x)}{x} \to 1 \iff \sin(x) = x + o(x)$$

VOGLIO "ESPLORARE" $o(x)$ POSSO PROVARE COSÌ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^k} = \circledast \qquad \text{con } k \text{ da decidere}$$

USO DE L'HÔPITAL (tutti i passaggi si giustificano alla fine)

$$\circledast = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{k\, x^{k-1}} \qquad \left(= 0 \quad \text{se } k \leq 1 \right)$$

se $k>1$ VADO AVANTI CON UN ALTRO HÔPITAL =

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{k(k-1)\, x^{k-2}} \qquad \left(= 0 \quad \text{se } k \leq 2 \right)$$

se $k>2$ ALTRO HÔPITAL $\longrightarrow$ 0 se $k<3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{k(k-1)(k-2)\, x^{k-3}} = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{se } k = 3 \\ -\infty & \text{se } k > 3 \end{cases}$$

IN PARTICOLARE HO TROVATO $(K=3)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6} \iff$$

$$\frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1) \iff$$

$$\sin(x) = x \underbrace{- \frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{\text{IL VECCHIO } o(x)}$$

Potrei andare avanti e fare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + x^3/6}{x^k} \quad \text{(bisognerebbe fare i conti)} \; \text{- - - -} = \begin{cases} 0 & \text{se } K < 5 \\ \frac{1}{120} & K = 5 \\ +\infty & \text{se } K > 5 \end{cases}$$

da cui $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ (e così via)

Teorema (di de l'Hôpital)

Siano f e g definite in $]x_0, x_1[$ dove $x_1 > x_0$ e x_0 puõ essere sia un numero reale che $-\infty$.

Supponiamo che l'espressione $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sia una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$, CIOÈ che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to x_0^+} g(x) = 0 \quad O \quad \lim_{x\to x_0^+} |f(x)| = +\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0^+} |g(x)| = +\infty$$

Supponiamo anche che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]x_0, x_1[$ e che esista il limite

$$l = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \textit{(l può essere finito o infinito)}$$

Allora $$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

DIM del caso 0/0